



TITLE:

輸送方程式の作用素論的取扱い (Navier-Stokes方程式等の位相解析 的数値解析的研究)

AUTHOR(S):

浅野, 潔; 鵜飼, 正二; 静田, 靖

CITATION:

浅野, 潔 ...[et al]. 輸送方程式の作用素論的取扱い (Navier-Stokes方程式等の位相解析的数値解析的研究). 数理解析研究所講究録 1972, 164: 56-106

ISSUE DATE:

1972-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106948>

RIGHT:

輸送方程式の作用素論的取扱

京大 教養 浅野 潔

京大 工 鶴飼 正二

奈良女大理 静田 靖

のりゆる中性子の輸送方程式として考察されているいくつかの方程式—初期値境界値問題—を、作用素論的の方法で扱うことがこの目標である。方法を要約すれば、かなり特殊な条件をみたす作用素の半群に対して、ある種の摂動を与えたときに得られる作用素の半群の性質を調べる、ということになるが、この過程をいくらか抽象的に行なうことによって、これまで知られている結果よりも、いくらかよい結果を多少見通しよく得ることができるようになる。

始めに輸送方程式の例をあげておこう。

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x}{2} \int_{-1}^1 u(t, x, \mu') d\mu' & t > 0, |x| \leq a \\ u = u(t, x, \mu) \in L^2(x, \mu) = L^2_x(-a, a) \otimes L^2_\mu(-1, 1) \\ u(0, x, \mu) = u_0(x, \mu) & \text{初期条件} \\ \left. \begin{aligned} u(t, -a, \mu) &= \alpha u(t, a, \mu), \quad \mu > 0 \\ u(t, a, \mu) &= \alpha u(t, -a, \mu), \quad \mu < 0 \end{aligned} \right\} & \text{境界条件} \end{cases}$$

ただし $-1 \leq \alpha \leq 1$ であるが、通常は $\alpha = 0$ (± 1) の場合のみを考慮することになる。

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma(\lambda) u \\ \quad + \frac{K}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^\infty K(\lambda, \lambda') u(t, x, \lambda', \mu') d\lambda' \\ u = u(t, x, \lambda, \mu) \in L^2_{(\lambda, \mu)}((-a, a) \times (0, \infty) \times (-1, 1)) \\ u(0, x, \lambda, \mu) = u_0(x, \lambda, \mu) \cdots \text{初期条件} \\ \left. \begin{array}{l} u(t, -a, \lambda, \mu) = 0, \quad \mu > 0 \\ u(t, a, \lambda, \mu) = 0, \quad \mu < 0 \end{array} \right\} \text{境界条件,} \end{array} \right.$$

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -(\omega \cdot \nabla_x) u + \frac{K}{4\pi} \int_{S^2} K(x, \omega, \omega') u(t, x, \omega') dS_{\omega'} \\ x \in \Omega \text{ (有界凸領域 } \subset \mathbb{R}^3), S^2 = \text{単位球面} \\ u = u(t, x, \omega) \in L^2_{(x, \omega)}(\Omega \times S^2) \\ u(0, x, \omega) = u_0(x, \omega) \cdots \text{初期条件} \\ \left. \begin{array}{l} u(t, y, \omega) = 0, \quad y \in \partial\Omega, (\eta_y, \omega) < 0 \end{array} \right\} \cdots \text{境界条件} \end{array} \right.$$

上の問題はいずれも、もう少し複雑な方程式になんらかの単純化を行なって得られるのであるが、ここではそうした議論には立ち入らない。またこの小論では、問題(I)のみを取扱うことにするが、われわれの方法は、問題(II), (III)に対しても適用可能である。問題(I)を抽象的(作用素論的)な枠組

に移す手順は、次のとおりである。

$$\begin{cases} \mathcal{H} = L^2(-a, a) \\ \mathcal{D}(L) = \left\{ u \in \mathcal{H}; -\frac{d}{dx}u \in \mathcal{H}, u(-a) = \alpha u(a) \right\} \\ L = -\frac{d}{dx} \end{cases}$$

とおく。\$L\$ は \$\mathcal{H}\$ において maximal dissipative な作用素になり、
従って縮小半群を生成するが、さらに次の評価

$$\|e^{\pm L}\| \leq \alpha^{\left[\frac{t}{2a}\right]}$$

をもつ。よって \$\alpha = 0\$ のときは

$$e^{\pm L} = 0, \quad t \geq 2a.$$

さらに

$$\mathcal{H}_\mu = L^2_\mu((-1, 1); \mathcal{H}) = L^2_\mu((-1, 1)) \otimes \mathcal{H}$$

$$A(\mu) = \begin{cases} \mu L, & 0 \leq \mu \leq 1 \\ -\mu L^*, & -1 < \mu < 0 \end{cases}$$

とおくと、\$A(\mu)\$ も \$\mathcal{H}\$ における maximal dissipative の作用素であって、\$A(-\mu) = A(\mu)^*\$ を満たす。\$\mathcal{H}_\mu\$ における作用素 \$A\$ を次のように定義する：

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{D}(A) = \left\{ u = u(\mu) \in \mathcal{H}_\mu; \underbrace{A(\mu)u(\mu) \in \mathcal{H}_\mu}_{u(\mu) \in \mathcal{D}(A(\mu)) \text{ for a.e. } \mu \text{ かつ}} \right\}, \\ (Au)(\mu) = A(\mu)u(\mu). \end{cases}$$

\$A\$ は \$\mathcal{H}_\mu\$ における maximal dissipative な作用素になる。擾動項は次のように与えられる。ある条件を満たす scalar 関数 \$h(\mu)\$

(条件は後述, (I) の場合は $h(\mu) \equiv 1/\sqrt{2}$) に対して, \mathcal{H} から \mathcal{H} への有界作用素 H^* を, 次のように定義する:

$$(2) \quad H^*: \mathcal{H} \ni u(\mu) \longmapsto H^*u = \int_{-1}^1 \overline{h(\mu)} u(\mu) d\mu \in \mathcal{H}.$$

$(H^*)^* = H$ とかくことにすると

$$(2)' \quad H: \mathcal{H} \ni v \longmapsto (Hv)(\mu) = h(\mu)v \in \mathcal{H}.$$

KH^*H^* は \mathcal{H} から \mathcal{H} への有界作用素となるが, これを擾動項として

$$(3) \quad B = A + KH^*H^* \quad (K > 0), \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$$

とおけば, (I) は次のような発展方程式の形にかける:

$$(I)' \quad \frac{d}{dt} u = Bu, \quad u(0) = u_0.$$

B が \mathcal{H} において作用素の半群を生成することとは明きらかであるから, 問題 (I) は関数解析的な枠組によって, ひとまず解けている。われわれの目標は, B の *spectre* 的な性質, および (I)' の解 $e^{tB}u_0$ の漸近的な挙動を調べることである。

§ 1 問題の設定

いくらか一般的に問題を設定しなおしてみよう。 \mathcal{H} をヒルベルト空間, \mathcal{H} におけるノルムを $\|\cdot\|$, 内積を (\cdot, \cdot) とする。 L は \mathcal{H} における (閉) 作用素 (定義域 $\mathcal{D}(L)$) で, 次の条件をみたすものとしてよう:

$$(L.1) \quad L \text{ は maximal dissipative,}$$

(L.2) L の生成する半群 $U(t) = e^{tL}$ は次の評価式をみたす:

$$\|U(t)\| \leq M e^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0) \quad \text{または}$$

$$U(t) = 0 \quad (t \geq a > 0),$$

(L.3) ある λ_0 に対して $(\lambda_0 - L)^{-1}$ が compact 作用素,

(L.4) $\operatorname{Re} L^{-1} = \frac{L^{-1} + L^{-1*}}{2} = N$ は finite rank.

ときには, 条件 (L.2) の代わりに, 次の条件

(L.2') $U(t) = e^{tL}$ は unitary 群 (i.e. $L = \text{skew self-adj.}$)

をおくこともあるが, 以下では一応, 条件 (L.1) - (L.4) の下で考えることにする.

次に $\mathcal{M} = [-1, 1]$, $\mathcal{H}_\gamma = L^2(\mathcal{M}; \mathcal{H}) = L^2(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{H}$ とおき, \mathcal{H}_γ における作用素 $A = (A(\mu))$ を (1) と同様に定義すると, A は \mathcal{H}_γ において maximal dissipative である. \mathcal{H}_γ から \mathcal{H} への作用素 H は, (2) によって定義するが, γ で関数 $h(\mu)$ に関する条件を述べておこう:

$$(H.1) \quad |h(\mu)| = |h(-\mu)|, \quad \int_{-1}^1 |h(\mu)|^2 d\mu = 1,$$

$$(H.2) \quad |h(\mu)| \text{ は 区間 } [0, 1] \text{ で単調減少,}$$

$$(H.3) \quad |h(0)|^2 - |h(\mu)|^2 = O(\mu^{\varepsilon_0}), \quad (\mu \rightarrow 0 \text{ のとき}),$$

$$(H.4) \quad h(\mu) \in C^0(\mathcal{M}).$$

われわれの問題は, (3) によって定義される \mathcal{H}_γ の作用素 B (ただし $\gamma > 0$ とする) のスペクトルおよび半群 e^{tB} の性質

を調べるという問題になる。念のため、 B の形を書くと、

$$B = A + \kappa H H^* \quad (\kappa > 0), \quad \mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(A)$$

または

$$(Bu)(\mu) = A(\mu)u(\mu) + \kappa h(\mu) \int_{-1}^1 \overline{h(\mu')} u(\mu') d\mu'.$$

上の問題を、少し違った枠組によって解くことも考えてみよう。まず次の定理を用意する。

定理 \mathcal{H} をヒルベルト空間、 L を \mathcal{H} における maximal dissipative な閉作用素とすると、

(i) 自己共役作用素の族 $\{F(\lambda)\}_{\lambda=-\infty}^{\infty}$ が、次の性質をみたすものが存在する：

$$\begin{cases} F(\lambda) \text{ は単調増加 i.e. } \lambda < \lambda' \Rightarrow F(\lambda) \leq F(\lambda') \\ F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1 \\ (iL - z)^{-1} = \int \frac{1}{\lambda - z} dF(\lambda) \quad (\operatorname{Im} z > 0) \text{ (弱収束)}. \end{cases}$$

(ii) 上のような \mathcal{H} , $\{F(\lambda)\}$ に対して、 \mathcal{H} を含む (最小の) ヒルベルト空間 \mathcal{H}_0 と、 \mathcal{H}_0 におけるスペクトル分解 $\{F_0(\lambda)\}$ とが存在して、 \mathcal{H}_0 から \mathcal{H} への正射影を J とすると、

$$F(\lambda) = J F_0(\lambda) J^*.$$

上の定理によって存在が保証された \mathcal{H}_0 と $F_0(\lambda)$ を用いて

$$\mathcal{H}_0 = L^2(\mathcal{M}; \mathcal{H}_0) = L^2(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{H}_0 \xrightarrow{\tilde{J}} \mathcal{H}$$

$$iL_0 = \int \lambda dF_0(\lambda)$$

$$A_0 = (A_0(\mu)), \quad A_0(\mu) = \mu L_0 \quad (\mu \in \mathcal{M})$$

とおき, \mathcal{H}_0 から \mathcal{H}_0 への作用素 H_0^* (擾動項) を

$$(2)_0. \quad H_0^*: \mathcal{H}_0 \ni u(\mu) \longmapsto H_0^* u = \int_{-1}^1 \overline{h(\mu)} u(\mu) d\mu \in \mathcal{H}_0$$

によって定義しよう, $((H_0^*)^* = H_0$ とする)。

$$(3)_0. \quad B_0 = A_0 + \kappa H_0^* J^* J H_0^* \quad (\kappa > 0)$$

$$= A_0 + \kappa \tilde{J}^* H H^* \tilde{J}, \quad \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(A_0)$$

によって定義される (\mathcal{H}_0 の) 作用素 B_0 のスペクトルや B_0 の生成する作用素の群 e^{tB_0} の性質を調べること, A_0 と B_0 の向の (非自己共役的) 散乱などが, この枠組で考えられる問題である。

作用素 A と A_0 , B と B_0 の関係について, 次のことに注意する。まず

$$(\lambda - L)^{-1} = J (\lambda - L_0)^{-1} J^* \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0),$$

$$(\lambda - L^*)^{-1} = J (\lambda + L_0)^{-1} J^* \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0),$$

$$e^{tL} = J e^{tL_0} J^* \quad (t \geq 0),$$

$$e^{tL^*} = J e^{-tL_0} J^* \quad (t \geq 0)$$

は明らかに成り立つ。これから

$$(4) \quad e^{tA} = \tilde{J} e^{tA_0} \tilde{J}^*, \quad e^{tA^*} = \tilde{J} e^{-tA_0} \tilde{J}^* \quad (t \geq 0),$$

$$(5) \quad (\lambda - A)^{-1} = \tilde{J} (\lambda - A_0)^{-1} \tilde{J}^* = \int \frac{1}{\lambda + i\mu\lambda} dF(\lambda) \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0).$$

§ 5 に

$$(6)_0 \quad (\lambda - B_0)^{-1} = (\lambda - A_0)^{-1} + \kappa (\lambda - A_0)^{-1} \tilde{J}^* H H^* \tilde{J} (\lambda - B_0)^{-1},$$

$$(6) \quad (\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} + \kappa (\lambda - A)^{-1} H H^* (\lambda - B)^{-1}$$

より

$$(7)_0 \quad G_0(\lambda) = H^* \tilde{J} (\lambda - A_0)^{-1} \tilde{J}^* H \quad (\operatorname{Re} \lambda \geq 0),$$

$$(7) \quad G(\lambda) = H^* (\lambda - A)^{-1} H \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0)$$

と お く と

$$(8) \quad G_0(\lambda) = G(\lambda) \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0),$$

$$\{1 - \kappa G_0(\lambda)\} H^* \tilde{J} (\lambda - B_0)^{-1} = H^* \tilde{J} (\lambda - A_0)^{-1},$$

$$\{1 - \kappa G(\lambda)\} H^* (\lambda - B)^{-1} = H^* (\lambda - A)^{-1}.$$

以上より

$$(9)_0 \quad (\lambda - B_0)^{-1} = (\lambda - A_0)^{-1} + \kappa (\lambda - A_0)^{-1} \tilde{J}^* H \{1 - \kappa G_0(\lambda)\}^{-1} H^* \tilde{J} (\lambda - A_0)^{-1},$$

$$(9) \quad (\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} + \kappa (\lambda - A)^{-1} H \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} H^* (\lambda - A)^{-1}$$

が示されるので、次の関係も成り立つ：

$$(10) \quad (\lambda - B)^{-1} = \tilde{J} (\lambda - B_0)^{-1} \tilde{J}^* \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0).$$

これまでの議論から、次の定理は明らかであろう：

定理 1. B_0 は \mathcal{H}_0 において作用素の群 e^{tB_0} を生成し、

B は \mathcal{H} において作用素の半群 e^{tB} を生成する。さらに

$$(11) \quad e^{tB} = \tilde{J} e^{tB_0} \tilde{J}^* \quad (t \geq 0),$$

$$e^{tB^*} = \tilde{J} e^{tB_0^*} \tilde{J}^* \quad (t \geq 0).$$

§ 2. $G_0(\lambda)$ と $G(\lambda)$ の性質

作用素 B や B_0 の性質を知るために, $G(\lambda)$ や $G_0(\lambda)$ の性質を知ることが重要であることは, 前節 (9), (9)'. などから明らかである. そこで $G_0(\lambda)$ および $G(\lambda)$ の性質を調べてみよう. ヒルベルト空間 \mathcal{H} における有界作用素の全体を $B(\mathcal{H})$, compact 作用素の全体を $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ で表わす. いずれも作用素のノルムによってバナッハ空間となる.

補助定理 1. ($G_0(\lambda)$ と $G(\lambda)$ の性質)

(i) $G_0(\lambda)$ は $\mathbb{C}_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ において $B(\mathcal{H})$ の値をとる解析関数で, $G_0(-\bar{\lambda}) = -G_0(\lambda)^*$ を満たす. また $G(\lambda)$ は $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ で $B(\mathcal{H})$ の値をとる解析関数で, $G_0(\lambda) = G(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}_+$) を満たす.

(ii) $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ に対して, $(\lambda - B_0)^{-1} \in B(\mathcal{H}_{B_0})$ が存在する必要十分条件は $(1 - \kappa G_0(\lambda))^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在すること. $\lambda \in \mathbb{C}_+$ に対して, $(\lambda - B)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在する必要十分条件は $(1 - \kappa G(\lambda))^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在すること.

(iii) $0 < \operatorname{Re} G(\lambda) = \frac{1}{2} \{G(\lambda) + G(\lambda)^*\} < \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$, かつ $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ に従って $\operatorname{Im} G(\lambda) = \frac{1}{2i} \{G(\lambda) - G(\lambda)^*\} \leq 0$.

(iv) $0 < \beta < \beta'$ に対して $G(\beta) > G(\beta') > G(+\infty) = 0$. $u \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ に対して $\operatorname{Im} (G(\lambda)u, u) \neq 0$.

(v) $G(\lambda)$ は compact 作用素.

(vi) $\lambda \in \mathbb{C}_+ - \mathbb{R}_+$ (\mathbb{R}_+ = 正の実数の全体) に対して

$(1 - \kappa G(\lambda))^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在する。また \mathbb{R}_+ の高々 discrete な有界集合の実 β を除き, $(1 - \kappa G(\beta))^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在する。

(vii) $G(\lambda)$ は $B(\mathcal{H})$ のノルムで $\overline{\mathbb{C}_+} - \{0\}$ で連続, かつ

$$(12) \quad 0 \leq \operatorname{Re} G(\beta + i\gamma) \leq \frac{1}{|\gamma|} (1 + 2\pi |h(0)|^2),$$

$$\operatorname{Im} G(\beta + i\gamma) \geq 0 \quad (\gamma \geq 0, \beta \geq 0 \text{ のとき}).$$

(viii) $\lambda \in \overline{\mathbb{C}_+} - \overline{\mathbb{R}_+}$ に対して $(1 - \kappa G(\lambda))^{-1} \in B(\mathcal{H})$

が存在する。任意の $\delta > 0$ に対して, $C_{\kappa, \delta} > 0$ が存在して

$$(12)' \quad \|(1 - \kappa G(\lambda))^{-1}\| \leq C_{\kappa, \delta}, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \geq \delta.$$

証明. (i), (ii) は明らか。 (iii) については (5) より

$$(13) \quad G(\lambda) = H^*(\lambda - A)^{-1}H = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) \int_{-1}^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\lambda + i\mu\delta} d\mu$$

であり, $\lambda = \beta + i\gamma$ ($\in \mathbb{C}_+$) とおくと, (H.1) より

$$\operatorname{Re} \int_{-1}^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\lambda + i\mu\delta} d\mu = \int_{-1}^1 \frac{\beta |h(\mu)|^2}{\beta^2 + (\gamma + \mu\delta)^2} d\mu \in (0, \frac{1}{\beta})$$

であるから

$$0 < \operatorname{Re} G(\lambda) < \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}.$$

(13) より

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) \int_{-1}^1 \frac{-(\gamma + \mu\delta) |h(\mu)|^2}{\beta^2 + (\gamma + \mu\delta)^2} d\mu, \\ \int_{-1}^1 \frac{-(\gamma + \mu\delta) |h(\mu)|^2}{\beta^2 + (\gamma + \mu\delta)^2} d\mu &= \int_{-1/|\lambda|}^{1/|\lambda|} \frac{\gamma + \mu}{\beta^2 + (\gamma + \mu)^2} |h(\frac{\mu}{|\lambda|})|^2 \frac{d\mu}{|\lambda|} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mu}{\beta^2 + \mu^2} \left\{ |h(\gamma - \frac{\mu}{|\lambda|})|^2 - |h(\gamma + \frac{\mu}{|\lambda|})|^2 \right\} \frac{d\mu}{|\lambda|}, \end{aligned}$$

ただし (H.1): $|h(\mu)| = |h(-\mu)|$ を用い, $h(\mu) = 0$ ($|\mu| > 1$) と

し。蛇足だが $|h(\frac{\mu}{|\lambda|})|^2 \frac{d\mu}{|\lambda|} \rightarrow \delta(0)$ ($|\lambda| \rightarrow 0$) なるから, 上の

変形は $\Delta = 0$ まで有効である。(H.2): $|h(\mu)|$ は $[0, 1]$ で単調減少より, $\gamma \geq 0$ に従って $\{ \quad \} \geq 0$ であるから, (iv) の後半は示された。(iii) と同教論的議論を合わせて, (iv) を得る。(vi) は (iv) と (v) から, (viii) は (vii) と (v) から得られるので, (v) と (vii) とを示せばよい。(v) は次の補助定理より得られる。

補助定理 2. $\varphi(\lambda)$ を $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ で定義された連続関数で $\varphi(\lambda) > 0$ とする。 $\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) dF(\lambda) \in \mathbb{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ (compact 作用素) とする。このとき, \mathbb{R} で定義された複素数値有界 Borel 可測関数 $\psi(\lambda)$ が, $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \psi(\lambda) = 0$ をみたすならば, $\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda) dF(\lambda) \in \mathbb{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ 。

(v) の証明。(L.3) より任意の λ ($\operatorname{Re} \lambda > 0$) に対して $(\lambda - L)^{-1} \in \mathbb{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ 。故に $\beta > 0$ に対して

$$\operatorname{Re} (\beta - L)^{-1} = \int \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} dF(\lambda) \in \mathbb{C}_{\infty}(\mathcal{H}).$$

(13) において $\int_{-1}^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\lambda + i\mu\Delta} d\mu$ は, Δ につき連続, $\Delta \rightarrow 0$ ($|\Delta| \rightarrow \infty$ のとき) であるから, 補助定理 2 より

$$G(\lambda) = \int dF(\lambda) \int_{-1}^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\lambda + i\mu\Delta} d\mu \in \mathbb{C}_{\infty}(\mathcal{H}).$$

(vii) を示すために, $G(\lambda)$ の表示式をいくらか変形しよう:

$$\int_{-1}^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\lambda + i\mu\Delta} d\mu = \int_{-|\Delta|}^{|\Delta|} \frac{|h(\frac{\mu}{\Delta})|^2}{\lambda + i\mu} \frac{d\mu}{|\Delta|}$$

であるから ($F(\lambda)$ が $\lambda=0$ の近傍で絶対連続ならば)

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) \int_{-|\lambda|}^{|\lambda|} \frac{|h(\frac{\mu}{\lambda})|^2}{\lambda + i\mu} \frac{d\mu}{|\lambda|} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\lambda + i\mu} \int_{|\lambda| \geq |\mu|} |h(\frac{\mu}{\lambda})|^2 \frac{1}{|\lambda|} dF(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda + i\mu} g(\mu) d\mu \end{aligned}$$

$$g(\mu) = \int_{|\lambda| \geq |\mu|} |h(\frac{\mu}{\lambda})|^2 \frac{1}{|\lambda|} dF(\lambda) = g(-\mu).$$

上で定義した $g(\mu) \in B(\mathcal{H})$ (実は $\in C_{\infty}(\mathcal{H})$) は, 自己共役作用素であるが, 明らかに次の性質をもつ:

$$(14) \quad \begin{cases} 0 \leq g(\mu) = g(-\mu) \leq \frac{1}{|\mu|} |h(0)|^2, \\ g(\mu) \text{ は } (0, \infty) \text{ で単調減少,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(\mu) d\mu = 1 \quad (\mathcal{H} \text{ の弱位相で}). \end{cases}$$

これから, たとえば $\gamma > 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G(\beta + i\gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + (\gamma + \mu)^2} g(\mu) d\mu \\ &= \left(\int_{-\infty}^{-\frac{3}{2}\gamma} + \int_{-\frac{1}{2}\gamma}^{\infty} \right) \frac{\beta}{\beta^2 + (\gamma + \mu)^2} g(\mu) d\mu + \int_{-\frac{3}{2}\gamma}^{-\frac{1}{2}\gamma} \dots \\ &\leq \int \frac{1}{2} \frac{2}{\gamma} g(\mu) d\mu + \int \frac{\beta}{\beta^2 + (\gamma + \mu)^2} g(-\frac{\gamma}{2}) d\mu \\ &\leq \frac{1}{\gamma} + \pi g(-\frac{\gamma}{2}) \leq \frac{1}{\gamma} (1 + 2\pi |h(0)|^2). \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G(\beta + i\gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(\gamma + \mu)}{\beta^2 + (\gamma + \mu)^2} g(\mu) d\mu \\ &= \int_0^{\infty} \frac{-\mu}{\beta^2 + \mu^2} \{g(\gamma - \mu) - g(\gamma + \mu)\} d\mu \end{aligned}$$

であるから, ある $\gamma > 0$ に対して $\operatorname{Im} G(+0 + i\gamma)$ が存在して, $g(\mu)$ が γ で連続ならば,

$$\operatorname{Im} G(+0 + i\gamma) = \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{-1}{\mu} \{g(\gamma - \mu) - g(\gamma + \mu)\} d\mu.$$

いま $\{g(x-\mu) - g(x+\mu)\} \geq 0$ は (14) より明らかであるが、ある $v \in \mathcal{H}$ に対して $(\{g(x-\mu) - g(x+\mu)\} v, v) \equiv 0$ とすると、(14) より $(g(\mu) v, v) \equiv 0$ 、 $(v, v) = \int (g(\mu) v, v) d\mu = 0$ となる。故に $v \neq 0$ なるば $(\operatorname{Im} G(+0+i0) v, v) < 0$ 。

以上の議論から、 $G(\lambda)$ が $B(\mathcal{H})$ の位相で $\overline{G_+ - \{0\}}$ に連続的に拡張されることを示せば、(Vii) の証明は完成するところになる。そのために $G(\lambda)$ をもう少し書きかえてみよう。

$$G(\lambda) = H^*(\lambda - A)^{-1} H,$$

$$(\lambda - A)^{-1} = \begin{cases} (\lambda - \mu L)^{-1} = \frac{1}{\mu} (\frac{\lambda}{\mu} - L)^{-1} & (\mu > 0), \\ (\lambda + \mu L^*)^{-1} = \frac{1}{\mu} (\frac{\lambda}{\mu} + L^*)^{-1} & (\mu < 0). \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int_0^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\mu} (\frac{\lambda}{\mu} - L)^{-1} d\mu + \int_{-1}^0 \frac{|h(\mu)|^2}{\mu} (\frac{\lambda}{\mu} + L^*)^{-1} d\mu \\ &= \int_0^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\mu} \left\{ (\frac{\lambda}{\mu} - L)^{-1} + (\frac{\lambda}{\mu} - L^*)^{-1} \right\} d\mu \\ &= \int_0^\infty \{e^{tL} + e^{tL^*}\} dt \int_0^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\mu} e^{-\frac{\lambda}{\mu} t} d\mu. \end{aligned}$$

したがって $(\frac{\lambda}{\mu} - L)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{\mu} t} e^{tL} dt$ 等とを用いた。

$$\begin{aligned} \widehat{E}(z) &= \int_0^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\mu} e^{-\frac{z}{\mu}} d\mu \quad (\operatorname{Re} z > 0) \\ &= |h(0)|^2 \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{z}{\mu}}}{\mu} d\mu + \int_0^1 \{|h(\mu)|^2 - |h(0)|^2\} \frac{e^{-\frac{z}{\mu}}}{\mu} d\mu \\ &= |h(0)|^2 \{E(z) - E_1(z)\} \end{aligned}$$

とおくと、 $E(z)$ はいわゆる exponential integral である。

$$E(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{z}{\mu}}}{\mu} d\mu = -\log z - \gamma + E_0(z).$$

ここで γ は Euler の定数, $E_0(z)$ は z の ⁽¹⁾整数で, $E_0(0)=0$,
 $|E_0(z)| \leq e^{|z|}$ である。さらに, $z, z' \in \overline{\mathbb{C}}_+$ に対しては

$$(15) \quad \begin{cases} |E_0(z)| \leq 3 \log(1+|z|), \\ |E_0(z) - E_0(z')| \leq 3|z-z'|. \end{cases}$$

次に $|h(\mu)|^2 - |h(0)|^2 = -|h(0)|^2 \mu^{\varepsilon_0} \varphi(\mu)$ ($\mu \geq 0$) とおくと,
 $0 \leq \varphi(\mu) \leq b_1$ であるから

$$(16) \quad \begin{aligned} E_1(z) &= \int_0^1 \mu^{\varepsilon_0} \varphi(\mu) \frac{e^{-\frac{z}{\mu}}}{\mu} d\mu = \int_1^\infty \varphi\left(\frac{1}{\mu}\right) \frac{e^{-z\mu}}{\mu^{\varepsilon_0+1}} d\mu, \\ |E_1(z)| &\leq \int_0^1 b_1 \mu^{\varepsilon_0-1} d\mu = \frac{b_1}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

すなわち $E_1(z)$ は $\overline{\mathbb{C}}_+$ で有界連続である。さらに

$$|e^{-\lambda} - e^{-\lambda'}| \leq \frac{3|\lambda - \lambda'|}{1 + |\lambda - \lambda'|} \quad (\lambda, \lambda' \in \overline{\mathbb{C}}_+)$$

より $E_1(z)$ の $\overline{\mathbb{C}}_+$ における γ -Holder 連続性が導かれる:

$$(17) \quad \begin{aligned} |E_1(z) - E_1(z')| &\leq \int_1^\infty \varphi\left(\frac{1}{\mu}\right) \frac{|e^{-z\mu} - e^{-z'\mu}|}{\mu^{\varepsilon_0+1}} d\mu \\ &\leq b_1 \int_1^\infty \frac{1}{\mu^{\varepsilon_0+1}} \frac{3\mu|z-z'|}{1 + \mu|z-z'|} d\mu \\ &= 3b_1 \int_{|z-z'|}^\infty |z-z'|^{\varepsilon_0} \frac{1}{\mu^{\varepsilon_0}(1+\mu)} d\mu \leq \frac{6b_1}{\varepsilon_0} |z-z'|^{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

以上の計算から

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int_0^\infty \{e^{tL} + e^{tL^*}\} \widetilde{E}(\lambda t) dt \\ &= \int_0^\infty 2 \operatorname{Re} e^{tL} |h(0)|^2 \{-\log(\lambda t) - \gamma + E_0(\lambda t) - E_1(\lambda t)\} dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= 2|h(0)|^2 \int_0^\infty \operatorname{Re} e^{tL} \{-\log(\lambda t) - \gamma - E_1(\lambda t)\} dt \\ &= -2|h(0)|^2 \{\log \lambda + \gamma + E_1(0)\} N - 2|h(0)|^2 \int_0^\infty \operatorname{Re} e^{tL} \log t dt \end{aligned}$$

$$(N = \operatorname{Re} L^{-1} = \frac{L^{-1} + L^{*-1}}{2} = \int_0^\infty \operatorname{Re} e^{tL} dt : \text{finite rank}),$$

$$G_0(\lambda) = 2|h(0)|^2 \int_0^\infty \operatorname{Re} e^{tL} E_0(\lambda t) dt,$$

$$G_1(\lambda) = -2|h(0)|^2 \int_0^\infty \operatorname{Re} e^{tL} \{E_1(\lambda t) - E_1(0)\} dt$$

とおくと, (L.2), (15) および (16) から, $K(\lambda)$, $G_0(\lambda)$ および $G_1(\lambda)$ における被積分関数の作用素のノルムが可積分となり, 積分は \mathcal{H} で強収束する。 $K(\lambda)$ は $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{R}_-}$ で ($B(\mathcal{H})$ の値をとる) 解析関数となり, $G_0(\lambda)$ および $G_1(\lambda)$ は, $\overline{\mathbb{C}_+}$ で定義され, \mathbb{C}_+ で解析的な ($B(\mathcal{H})$ の値をとる) 関数である。さらに, (L.2), (15) および (17) から, $G_0(\lambda)$ は $\overline{\mathbb{C}_+}$ で $B(\mathcal{H})$ の位相で Lipschitz 連続, $G_1(\lambda)$ は $\overline{\mathbb{C}_+}$ で $B(\mathcal{H})$ の位相で ε_0 -Hölder 連続であることがわかる:

$$\|G_0(\lambda) - G_0(\lambda')\| \leq C_0 |\lambda - \lambda'|,$$

$$\|G_0(\lambda)\| \leq C_0 |\lambda|, \leq C'_0 \log(1 + |\lambda|),$$

$$\|G_1(\lambda) - G_1(\lambda')\| \leq C_1 |\lambda - \lambda'|^{\varepsilon_0},$$

$$\|G_1(\lambda)\| \leq C_1 |\lambda|^{\varepsilon_0}.$$

これで $G(\lambda)$ は $\overline{\mathbb{C}_+} - \{0\}$ において $B(\mathcal{H})$ の位相で連続な関数 (実は ε_0 -Hölder 連続) となることがわかったので, (VII) の証明は完了した ($\operatorname{Re} G(+0+i\gamma) = \pi g(-\gamma)$ に注意)。

$G(\lambda)$ についてもう少し調べてみよう。次のようにおく:

$$h^* = 2|h(0)|^2 \left(\geq \frac{1}{2}\right),$$

$$K = K(1) = -h^*(1 + E_1(0))N - h^* \int_0^\infty \operatorname{Re} e^{tL} \log t dt,$$

$$K(\lambda) = -h^* \log \lambda N + K, \quad (N = \operatorname{Re} L^{-1} \geq 0),$$

$$H(\lambda) = \lambda^{-\varepsilon_0} \{ G_0(\lambda) + G_1(\lambda) \}, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - \{0\}.$$

ただし λ^{ε_0} は $\lambda > 0$ のとき $\lambda^{\varepsilon_0} > 0$ とする分枝をとる。

$$(18) \quad \begin{cases} G(\lambda) = K(\lambda) + \lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda), \\ \|H(\lambda)\| \leq c_2, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - \{0\} \end{cases}$$

などが成り立つ。さらに次のことがいえる：

補助定理 3. $G(\lambda)$ の分解 (18) において

- (i) $K, K(\lambda), H(\lambda) \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - \{0\}$,
- (ii) $\lambda > 0$ のとき $K(\lambda), H(\lambda)$ は自己共役作用素,
- (iii) ε_0 は有理数としても一般性を失わない。

証明. (ii), (iii) は明らか。 (i) を示すためには,

$$K_\infty = \int_0^\infty \operatorname{Re} e^{tL} \log t \, dt \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$$

を示せばよい。

$$K_n = \int_0^n \operatorname{Re} e^{tL} \log t \, dt$$

とおくと, (L.2) より $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\|K_\infty - K_n\| \leq \int_n^\infty \|\operatorname{Re} e^{tL}\| |\log t| \, dt \rightarrow 0$$

であるから, $K_n \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$ を示せばよい。これは次の補助定理 4 からただちにわかる。

補助定理 4. $\varphi(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ とする。

$$\hat{\Phi} = \int_0^\infty \varphi(t) e^{tL} \, dt \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H}).$$

証明. $e^{tL} = J e^{tL^0} J^* = J \int_{-\infty}^\infty e^{-it\lambda} dF_0(\lambda) J^* = \int_{-\infty}^\infty e^{-it\lambda} dF(\lambda)$ であるから, $\hat{\Phi}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-it\lambda} \varphi(t) \, dt$ とし,

$$\hat{\Phi} = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\omega) \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t) dt = \int \hat{\varphi}(\omega) dF(\omega).$$

$\hat{\varphi}(\omega)$ は $(-\infty, \infty)$ で有界連続, $|\omega| \rightarrow \infty$ のとき $\hat{\varphi}(\omega) \rightarrow 0$ であるから, 補助定理 2 より, $\hat{\Phi} \in C_{\infty}(H)$. (証明了)

最後に $G(\lambda)$ のスペクトル (固有値) について述べる.

補助定理 5. compact 自己共役作用素 K の (正の) 固有値に大きさの順に番号をつけて, $p_1(K) \geq p_2(K) \geq \dots \geq p_n(K) \geq \dots (> 0)$ などとする. β が $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ を動くとき

- (i) $p_n(G(\beta))$ は狭義単調減少, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} p_n(G(\beta)) = 0$.
- (ii) $p_n(K(\beta))$ も単調減少, $|p_n(G(\beta)) - p_n(K(\beta))| \leq C_2 \beta^{\varepsilon_0}$.
- (iii) $r = \text{rank } N$ とすると

$$\lim_{\beta \rightarrow +0} p_n(K(\beta)) = \infty, \quad 1 \leq n \leq r,$$

$$\lim_{\beta \rightarrow +0} p_n(K(\beta)) = p_n^* \in [p_n(K), p_{n-r}(K)], \quad r < n,$$

- (iv) $\{p_n(G(\beta))\}$ の番号を適当につけかえて $\{p_n(\beta)\}$ とし,

し, 次の条件をみたすようにすることができ:

$$\begin{cases} p_n(\beta) \text{ は } (0, \infty) \text{ で狭義単調減少, 実解析的,} \\ p_n(\beta) \uparrow \infty \quad (\beta \downarrow 0), \quad 1 \leq n \leq r, \\ p_n(\beta) \uparrow p_n^* \equiv p_n(0) \quad (\beta \downarrow 0), \quad r < n, \\ p_n(\beta) \downarrow 0 \quad (\beta \uparrow \infty), \end{cases}$$

- (v) $\{p_n(K(\beta))\}$ の番号も適当につけかえて $\{\tilde{p}_n(\beta)\}$ とし,

し, 次の条件をみたすようにできる:

$$\{\tilde{p}_n(\beta) \text{ は } (0, \infty) \text{ で単調減少, 実解析的,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_n(\beta) \uparrow \infty \quad (\beta \downarrow 0), \quad 1 \leq n \leq r, \\ \tilde{p}_n(\beta) \uparrow p_n^* \quad (\beta \downarrow 0), \quad r < n, \\ \tilde{p}_n(\beta) \text{ は狭義単調減少, または } \tilde{p}_n(\beta) \equiv p_n^*. \end{array} \right.$$

証明. (i) - (iii) は min-max 原理から得られる。(iv), (v) は固有値の(解析的)擾動に因して知られてゐる結果である(たとえば文献[3]).

注意1. $p'_n(\beta) < 0$ ($n=1, 2, \dots$) が示される。

注意2. K を $\mathcal{R}(N)^\perp (= N \text{ の range の直交補空間})$ に制限した作用素は正定値である。

注意3. $\tilde{p}_n(\beta) \equiv p_n^*$ のとき, p_n^* は K の固有値であり, また $-h^* K_\infty$ の固有値でもある。

$\Lambda = \{p_n^*; n=1, 2, \dots\}$ (ただし $1 \leq n \leq r$ に対しては $p_n^* = \infty$ とする), $\Lambda_e = \{p_n^*; \tilde{p}_n(\beta) \equiv p_n^*\}$ とおく。
さらに, $K > 0$ に対して, $N(K) = \text{"} K p_n^* > 1 \text{" となる } p_n^* \text{ の個数"}$
i.e. $K p_n^* > 1$ ($n=1, \dots, N(K)$), $K p_n^* \leq 1$ ($n > N(K)$)
とする。次の補助定理は明らかである。

補助定理 B. (i) $K > 0$, $K p_n(\beta) = 1$ の根を $\beta_n (> 0)$ とする ($n=1, \dots, N(K)$) と, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{N(K)}\}$ に対して $(1 - K G(\lambda))^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在する。 β_n ($1 \leq n \leq N(K)$) は, $(1 - K G(\lambda))^{-1}$ の simple pole であり, それらの residue は

$-\frac{1}{\kappa p'_n(\beta_n)} P_n(\beta_n)$, $P_n(\beta_n)$ は $G(\beta_n)$ の固有値 $p_n(\beta_n)$ に属する固有空間 \wedge の正射影, となる。 $\beta_n = \beta_n(\kappa)$ とかくと, $\beta_n(\kappa)$ は $(\frac{1}{p_n^*}, \infty)$ で κ につき狭義単調増加, 実解析的となる。

(ii) $\kappa > 0$, $\kappa^{-1} \in \Lambda_e$ ならば $(1 - \kappa K(\lambda))^{-1}$ は, すべての λ に対して存在しないう。 $\kappa^{-1} \notin \Lambda_e$ ならば, $\kappa \tilde{p}_n(\beta) = 1$ の根を $\tilde{\beta}_n$ ($1 \leq n \leq N(\kappa)$, ただし根が存在する $-\tilde{p}_n(\beta) \equiv p_n^*$ であるとき) とするとき, $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} - \{\tilde{\beta}_n\}$ に対して, $(1 - \kappa K(\lambda))^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在する。 $\tilde{\beta}_n$ は simple pole である。

§3 作用素 B のスペクトル

前節の結果から, 作用素 B のスペクトルについて, ある程度のことがわかる。 B の κ に関する依存を明示したいときは, B を $B(\kappa)$ とかく

$$B = B(\kappa) = A + \kappa H H^*.$$

定理 2. (i) $B(\kappa)$ は固有値 $\{\beta_1(\kappa), \dots, \beta_{N(\kappa)}(\kappa)\}$ をもつ。 $\mathbb{C}_+ - \{\beta_1(\kappa), \dots, \beta_{N(\kappa)}(\kappa)\}$ は $B(\kappa)$ の resolvent set に属する。 $(\lambda - B(\kappa))^{-1}$ は $\beta_n(\kappa)$ において simple pole をもつ。 $B(\kappa)$ は虚軸上に固有値をもたない。

(ii) 条件 (L.2) で $e^{tL} = 0$ ($t \geq a$) が成り立つとき,

$\overline{0_-}$ は $B(\kappa)$ の連続スペクトルに属する。

証明. (i) は (9) と補助定理 5 から得られる。 $B(\kappa)$ が虚軸上に固有値を有する $\mu \geq 0$ を示そう。 $\gamma > 0$ とし、ある $u = u(\mu) \in \mathcal{H}_\gamma$ に対して

$$B(\kappa)u = i\gamma u,$$

$$\text{i.e. } A(\mu)u(\mu) + \kappa H H^* u(\mu) = i\gamma u(\mu)$$

が成り立つとする。

$$v = H^* u \in \mathcal{H}$$

とおくと, $\lambda = \varepsilon + i\gamma$ ($\varepsilon > 0$) とし

$$(\lambda - A(\mu))u(\mu) = \kappa H v + (\lambda - i\gamma)u(\mu),$$

$$\therefore u(\mu) = \kappa (\lambda - A(\mu))^{-1} H v + \varepsilon (\lambda - A(\mu))^{-1} u(\mu),$$

$$\therefore v = H^* u$$

$$= \kappa H^* (\lambda - A)^{-1} H v + \varepsilon H^* (\lambda - A)^{-1} u,$$

$$\therefore v = \kappa G(\lambda) v + \varepsilon H^* (\lambda - A)^{-1} u.$$

よって $\text{Re } \lambda = \varepsilon$ と $(i\gamma - A(\mu))^{-1}$ の存在 (\Leftarrow (L.2)) による

$$\|\varepsilon (\lambda - A(\mu))^{-1} u(\mu)\| \leq \|u(\mu)\| \in L^2(\mathcal{M}),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon (\varepsilon + i\gamma - A(\mu))^{-1} u(\mu)\| = 0 \quad (\text{a.e. } \mu),$$

$$\therefore \varepsilon (\lambda - A)^{-1} u \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{H}_\gamma \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

従って $\varepsilon \rightarrow 0$ とし

$$v = \kappa G(+0 + i\gamma) v,$$

$$(1 - \kappa G(+0 + i\gamma)) v = 0 \quad \therefore v = 0$$

(補助定理 1 (Vii) より) を得る。 $H^* u = v = 0$ より

$$A(\mu) u(\mu) = i\gamma u(\mu),$$

$$\therefore (i\gamma - A(\mu)) u(\mu) = 0, \quad \therefore u(\mu) = 0 \text{ (a.e. } \mu).$$

故に $i\gamma$ は $B(\kappa)$ の固有値ではない。次に

$$B(\kappa) u = 0,$$

$$\text{i.e. } A(\mu) u(\mu) + \kappa H \cdot H^* u(\mu) = 0$$

とする。 $H^* u = v$ とおくと ((L.2) より $L^{-1} \in B(\mathcal{H})$)

$$\begin{cases} +\mu L u(\mu) + \kappa h(\mu) v = 0 & (\mu > 0), \\ -\mu L^* u(\mu) + \kappa h(\mu) v = 0 & (\mu < 0), \end{cases}$$

$$\text{i.e. } u(\mu) = \begin{cases} -\kappa \frac{h(\mu)}{\mu} L^{-1} v & (\mu > 0), \\ \kappa \frac{h(\mu)}{\mu} L^{*-1} v & (\mu < 0). \end{cases}$$

$u(\mu) \in \mathcal{C}_\gamma$ であるためには, $L^{-1} v = L^{*-1} v = 0$ となければならぬから, $u(\mu) = 0$ (a.e. μ) となる。

(ii) を示すために, まず \mathbb{C}_- は A の連続スペクトルに属する λ をいう。 A および A^* が \mathbb{C}_- に固有値 (実スペクトル) をもたないことは明らかである。従って, $\lambda \in \mathbb{C}_-$ が A の essential spectrum に属する λ を示せばよい。そのために

$$\int_1^\infty \|(\lambda t - L)^{-1} v\| dt = +\infty$$

なる $v \in \mathcal{H}$ をとると、次のような単調増加数列 $\{R_n\}$ が存在する:
(実は $v \neq 0$ なる u)

$$\int_{R_n}^{R_{n+1}} \|(\lambda t - L)^{-1} v\|^2 dt = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty.$$

$$a_n(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \in [\frac{1}{R_{n+1}}, \frac{1}{R_n}] \\ 0, & \mu \notin [\frac{1}{R_{n+1}}, \frac{1}{R_n}] \end{cases},$$

$$\varphi_n(\mu) = a_n(\mu) (\lambda - \mu L)^{-1} v \in \mathcal{Q}(A) \subset \mathcal{E}_\gamma$$

とおくと, $\{\varphi_n\}$ が A の λ に対する singular sequence となることが, 次のようにしてわかる:

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|^2 &= \int_{R_{n+1}}^{R_n^{-1}} \|(\frac{\lambda}{\mu} - L)^{-1} v\|^2 \frac{1}{\mu^2} d\mu = \int_{R_n}^{R_{n+1}} \|(\lambda t - L)^{-1} v\|^2 dt \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0 \quad (n \neq m),$$

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)\varphi_n\|^2 &= \int_{R_{n+1}}^{R_n^{-1}} \|(\lambda - \mu L)\varphi_n(\mu)\|^2 d\mu = \int_{R_{n+1}}^{R_n^{-1}} \|v\|^2 d\mu \\ &= (R_n^{-1} - R_{n+1}) \|v\|^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\varphi_n \rightarrow 0 \quad (\mathcal{E}_\gamma \text{ の 弱位相で}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

あとで $HH^*(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{E}_\gamma)$ を示すので, A と B との essential spectrum は同一である。そこで B と B^* が \mathcal{C}_- に固有値をもたないことを示せば, \mathcal{C}_- は B の連続スペクトルに属するようになる。 $\lambda \in \mathcal{C}_-$ と $u \in \mathcal{E}_\gamma$ に対して

$$Bu = \lambda u$$

$$\text{i.e. } A(\mu)u(\mu) + \kappa HH^*u(\mu) = \lambda u(\mu)$$

とする。 $\kappa H u^* = v \in \mathcal{H}$ とおくと

$$(\lambda - A(\mu))u(\mu) = h(\mu)v,$$

$$\therefore (\lambda - \mu L)u(\mu) = h(\mu)v, \quad \mu > 0,$$

$$\therefore u(\mu) = h(\mu)(\lambda - \mu L)^{-1}v \in L^2([0, 1]; \mathcal{H})$$

ある区間 $[0, \eta]$ で $|h(\mu)| \geq |h(\eta)| > 0$ であるから

$$w(\mu) = (\lambda - \mu L)^{-1}v \in L^2((0, 1); \mathcal{H}).$$

なせならば, $\|w(\mu)\| \in L^2(0, \eta)$ は明らかであるし, 他方

$w(\mu) = \frac{1}{\mu}(\frac{\lambda}{\mu} - L)^{-1}v$ は $[\eta, 1]$ で連続であるから. したがって

$$F(z) = (\lambda z - L)^{-1}v$$

とおく. $F(z)$ は z の整関数で, かつ exponential order 1 である ($(\lambda z - L)^{-1} = \int_0^1 e^{-\lambda z t} e^{tL} dt$ より). したがって

$$\Lambda F(\lambda) = \Lambda(\lambda \Lambda - L)^{-1}v = w(\frac{1}{\Lambda}),$$

$$\therefore \int_1^\infty \|F(\lambda)\|^2 d\lambda = \int_0^1 \|F(\frac{1}{\mu})\|^2 \frac{1}{\mu^2} d\mu = \int_0^1 \|w(\mu)\|^2 d\mu < \infty,$$

$$\therefore \int_0^\infty \|F(\lambda)\|^2 d\lambda = M < \infty.$$

である. $-\lambda = \rho e^{i\phi}$, $|\phi| < \frac{\pi}{2}$, $z = r e^{i\theta}$ とおき,

$$\cos(\theta + \phi) < 0$$

と仮定する. θ を固定する (後に $\theta = \pi - \frac{\phi}{2} \pm \frac{\pi}{4} \equiv \theta_{\pm}$ とする).

z のとき $-\lambda z \in \mathbb{C}_-$, i.e. $\lambda z \in \mathbb{C}_+$, であるから

$$\|F(r e^{i\theta})\| \leq \|(\lambda r e^{i\theta} - L)^{-1}\| \|v\| \leq M_\theta (< \infty).$$

$z \geq z'$

$$z Q(z) = \int_0^z F(\zeta)^2 d\zeta$$

とおくと, $\Lambda > 0$ のとき

$$\Lambda \|Q(\Lambda)\| \leq \int_0^\Lambda \|F(t)\|^2 dt \leq \int_0^\infty \|F(t)\|^2 dt = M,$$

$$\therefore Q(\lambda) \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow +\infty).$$

また $z = r e^{i\theta}$ に対しては

$$r e^{i\theta} Q(r e^{i\theta}) = \int_0^r F(\tau e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\tau,$$

$$\therefore r \|Q(r e^{i\theta})\| \leq \int_0^r \|F(\tau e^{i\theta})\|^2 d\tau \leq M_\theta^2 r,$$

$$\therefore \|Q(r e^{i\theta})\| \leq M_\theta^2.$$

ここで θ を前述の $\theta \pm 12$ とすると, Phragmén-Lindelöf の定理を適用するとことができて, $Q(z)$ は有界な整関数となり, 結局 $Q(z) \equiv 0$ であることがわかる。従って, $F(z) \equiv 0$ となり, $v = 0$ を得る。故に $u(\mu) = 0$ ($a.e. \mu$) となり, λ は B の固有値ではない。 B^* が \mathbb{C}_- に固有値をもたないことも同様に示される。

$H \cdot H^*(\lambda - A)^{-1} \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$ は次の補助定理を利用すれば, 容易に示すことができる。

補助定理 7. I を有界閉区間, $S \in \mathbb{C}_\infty(L^2(I))$, $T \in B(L^2(I; \mathcal{H}))$ (以下 $\mathcal{H} = L^2(I; \mathcal{H})$ とする) とする。 S は自然に \mathcal{H} の作用素に拡張されるので, それを $\tilde{S} \in B(\mathcal{H})$ とする ($\|S\| = \|\tilde{S}\|$ である)。また T は, I から $\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$ への ($B(\mathcal{H})$ のノルムで) 区分的に連続な関数 $T(\mu)$ によって,

$$\mathcal{H} \ni u(\mu) \longmapsto (Tu)(\mu) = T(\mu)u(\mu) \in \mathcal{H}$$

とかけられるものとする。このとき, $\tilde{S}T, T\tilde{S} \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$ 。

証明. $S \in B(L^2(I))$, $T \in B(\mathcal{H})$ とし, それぞれの

\mathcal{H} の作用素への自然な拡張を \tilde{S} , \tilde{T} とするとき, $\tilde{S}\tilde{T} = \tilde{T}\tilde{S}$ を $S \otimes T$ ともかくことにする. $\|S \otimes T\| = \|S\| \|T\|$ である. また $\|\cdot\|_2$ によって, 作用素の Hilbert-Schmidt norm を表わすとき, $\|S \otimes T\|_2 = \|S\|_2 \|T\|_2$ も成り立つ. これらのことから (適当な近似によつて), $S \in \mathcal{C}_\infty(L^2(I))$, $T \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ ならば, $S \otimes T \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ となることがわかる.

関数 $T(\mu)$ は階段関数 $T_n(\mu)$ によつて ($B(\mathcal{H})$ のノルムで) I 上に一様に近似できる. このとき作用素 $T_n \in B(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ のノルムで T を近似するので, $\tilde{S}T_n \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ ならば, $\tilde{S}T_n \rightarrow \tilde{S}T$ (in $B(\mathcal{H})$) より, $\tilde{S}T \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ がわかる. 従つて, $T(\mu)$ が階段関数の場合に証明できればよい.

$$T(\mu) = \sum_{j=1}^n T_j \varphi_j(\mu), \quad T_j \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}),$$

$\varphi_j(\mu)$ は I の部分区間の特性関数

とする. $L^2(I)$ の作用素 E_j を次のように定義する:

$$L^2(I) \ni u(\mu) \longmapsto (E_j u)(\mu) = \varphi_j(\mu) u(\mu).$$

明らかに $E_j \in B(L^2(I))$, かつ

$$T = \sum E_j \otimes T_j.$$

$$\therefore \tilde{S}T = \sum_{j=1}^n (\tilde{S}E_j) \otimes T_j \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}).$$

ここで $\tilde{S}E_j \in \mathcal{C}_\infty(L^2(I))$ を用いた. 同様にして

$$T\tilde{S} = \sum_{j=1}^n (E_j \tilde{S}) \otimes T_j \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$$

などより, 証明了.

§4 e^{tB} の漸近的挙動

$B(\kappa)$ のスペクトルの右端が $\beta_1(\kappa)$ であるから, $\sigma > \beta_n(\kappa)$, $((1 \leq n \leq N(\kappa)))$

$u \in \mathcal{D}(B(\kappa)) = \mathcal{D}(A)$ とすると, $t > 0$ のとき

$$e^{tB(\kappa)} u = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - ir}^{\sigma + ir} e^{\lambda t} (\lambda - B(\kappa))^{-1} u d\lambda.$$

$B(\kappa)$ の固有値 $\beta_n(\kappa)$ に属する固有空間への射影を $Q_n(\kappa)$

とする. $Q_n(\kappa)$ は必ずしも連続ではないが,

$$Q_n(\kappa) Q_m(\kappa) = Q_m(\kappa) Q_n(\kappa) = \delta_{nm} Q_n(\kappa)$$

を満たすようにできる. ある n は

$$Q_n(\kappa) = (\cdot, \psi_n(\kappa)) \varphi_n(\kappa),$$

$$(\varphi_n(\kappa), \psi_m(\kappa)) = \delta_{nm},$$

$$B(\kappa) \varphi_n(\kappa) = \beta_n(\kappa) \varphi_n(\kappa),$$

$$B(\kappa)^* \psi_n(\kappa) = \beta_n(\kappa) \psi_n(\kappa).$$

また

$$Q = Q(\kappa) = \sum_{n=1}^{N(\kappa)} Q_n(\kappa),$$

$$Q' = Q'(\kappa) = 1 - Q(\kappa),$$

$$\varphi'_j = \varphi'_j(\kappa) = Q'(\kappa) \varphi_j,$$

$$B' = B'(\kappa) = B(\kappa) Q'(\kappa) = Q'(\kappa) B(\kappa) Q'(\kappa)$$

とおくと, B' は φ_j における作用素の半群 $e^{tB'}$ を生成し

$$e^{tB'} = e^{tB} Q' + Q = Q' e^{tB} Q' + Q,$$

$$\mathcal{D}(B'(\kappa)) = \mathcal{D}(A) \cap \varphi'_j(\kappa) \dot{+} Q(\kappa) \varphi_j,$$

$$\text{ただし } B'(\kappa) |_{Q(\kappa) \varphi_j} = 0.$$

あとの便利のために, 次の記号を定義しておく:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}' &= \mathcal{Q}'(\kappa) = \mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}'(\kappa) \\ &= \{u \in \mathcal{Q}(A); (u, \psi_n(\kappa)) = 0, 1 \leq n \leq N(\kappa)\}.\end{aligned}$$

明らかに

$$\begin{aligned}(19) \quad e^{tB(\kappa)} u &= e^{tB(\kappa)} (Q'(\kappa) + Q(\kappa)) u \\ &= e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u + \sum_{n=1}^{N(\kappa)} e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n(\kappa) u.\end{aligned}$$

右辺第1項を調べよう。 $u \in \mathcal{Q}(B(\kappa)) = \mathcal{Q}(A)$ のとき, $Q'(\kappa)u \in \mathcal{Q}'(\kappa)$ であるから, $u' \in \mathcal{Q}'(\kappa)$ に対して

$$e^{tB(\kappa)} u' = e^{tB'(\kappa)} u'$$

の挙動を調べればよい。 $B'(\kappa)$ のスペクトルは \mathbb{C}_+ に近いので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $M_\varepsilon = M_\varepsilon(\kappa)$ が存在して

$$\|e^{tB'(\kappa)}\| \leq M_\varepsilon e^{e\varepsilon t} \quad (t \geq 0),$$

$$\|(\lambda - B'(\kappa))^{-1}\| \leq M_\varepsilon \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \varepsilon} \quad (\operatorname{Re} \lambda > \varepsilon).$$

従って, 任意の $\delta > 0$ (実際は $0 < \delta < \min \beta_n(\kappa)$) に対して

$$e^{tB'(\kappa)} u' = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\gamma}^{\delta + i\gamma} e^{\lambda t} (\lambda - B'(\kappa))^{-1} u' d\lambda,$$

または $(\lambda - B)^{-1} Q' = (\lambda - B')^{-1} Q'$ より

$$e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\gamma}^{\delta + i\gamma} e^{\lambda t} (\lambda - B(\kappa))^{-1} Q'(\kappa) d\lambda.$$

いま

$$\begin{aligned}(20) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{tB} &= e^{tB} Q' + \sum e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n \\ &= e^{tA} Q' + Z(t) + \sum e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n, \\ Z(t) &= (e^{tB} - e^{tA}) Q' \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

とおく. $u \in \mathcal{D}(A)$ のとき, $Q'u \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}(A)$ なるから

$$(21) \quad \begin{aligned} Z(t)u &= \lambda - \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\gamma}^{\sigma+i\gamma} e^{\lambda t} \{(\lambda-B)^{-1} - (\lambda-A)^{-1}\} Q'u d\lambda \\ &= \lambda - \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\gamma}^{\sigma+i\gamma} e^{\lambda t} \zeta(\lambda) Q'u d\lambda. \end{aligned}$$

(9) より

$$(22) \quad \begin{aligned} \zeta(\lambda) &= (\lambda-B)^{-1} - (\lambda-A)^{-1} \\ &= K(\lambda-A)^{-1} H \{1 - K G(\lambda)\}^{-1} H^* (\lambda-A)^{-1} \end{aligned}$$

である. $\zeta(\sigma+i\lambda) Q'u \in L^1_A((-\infty, \infty); \mathcal{E}) = \mathcal{L} \quad (0 < \sigma)$,
かつ $\zeta(\sigma+i\lambda) Q'u \rightarrow \tilde{\zeta}(\lambda)$ in $\mathcal{L} \quad (\sigma \rightarrow 0)$ であれば,
Riemann-Lebesgue の定理により $Z(t)u \rightarrow 0$ (in \mathcal{E} as $t \rightarrow \infty$)
となる. われわれは, これより少し弱い結果を証明する. そ
のためには, $\{1 - K G(\sigma+i\lambda)\}^{-1}$ の評価と, $H^*(\sigma+i\lambda-A)^{-1}u$
の評価が必要である.

補助定理 8. $K > 0$, $K^{-1} \in \mathcal{A}_c$ とする.

(i) $(1 - K K(\lambda))^{-1}$ の正の pole の個数を $n(K)$ とする.

$n(K) > 0$ のとき, 最小の pole を $\hat{\beta}_0 = \tilde{\beta}_0(K)$, $n(K) = 0$ のとき,
 $\hat{\beta}_0 = \tilde{\beta}_0(K) = \infty$ とする. このとき, ある定数 $\hat{C}_K > 0$

により, 任意の $\lambda \in \bar{D}_{\frac{\hat{\beta}_0}{2}} = \{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-; |\lambda| \leq \frac{\hat{\beta}_0}{2}\}$ に対して

$$\|(1 - K K(\lambda))^{-1}\| \leq \hat{C}_K (1 + |\log |\lambda||)^{2r-1-n(K)}.$$

(ii) $\beta_0 = \beta_0(K) = \min_{1 \leq n \leq n(K)} \beta_n(K)$ とする. ある定数 $C_K > 0$ により,

任意の $\lambda \in D_{\frac{\beta_0}{2}} = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ - \{0\}; |\lambda| \leq \frac{\beta_0}{2}\}$ に対して

$$(23) \quad \|(1 - K G(\lambda))^{-1}\| \leq C_K (1 + |\log |\lambda||)^{2r-1-n(K)}.$$

証明。 $\lambda_0 = \frac{\tilde{\beta}_0}{2} > 0$ とおくと, $(1 - \kappa K(\lambda_0))^{-1} = T = T(\kappa) \in B(\mathcal{H})$ が存在する。 $\lambda = z\lambda_0$ とおくと, $\lambda \in \tilde{D}_{\frac{\beta_0}{2}}$ と $z \in \tilde{D}_1$ とは同値であり, また $K(\lambda) = -h^* \log(z\lambda_0) N + K = -h^* \log z N + K(\lambda_0)$ となる。

$$\begin{aligned} 1 - \kappa K(\lambda) &= 1 - \kappa h^* \log z N - \kappa K(\lambda_0) \\ &= \{1 - \kappa h^* \log z N (1 - \kappa K(\lambda_0))^{-1}\} (1 - \kappa K(\lambda_0)) \\ &= \{1 - \kappa h^* \log z N T(\kappa)\} (1 - \kappa K(\lambda_0)) \end{aligned}$$

より, $(1 - \kappa K(\lambda))^{-1} \in B(\mathcal{H})$ の存在と $(1 - \kappa h^* \log z N T(\kappa))^{-1} \in B(\mathcal{H})$ の存在とは同値である。 \square

$$w = \kappa h^* \log z,$$

$$S(w) = 1 - wNT$$

とおく。 \square 2.3 で, n 次元 Hilbert 空間における (線型) 作用素 S が invertible なとき, S^*S の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ を用いることにより

$$\begin{aligned} \|(S^*S)^{-1}\| &\leq \frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \frac{\|S^*S\|^{n-1}}{\det(S^*S)}, \\ \therefore \|S^{-1}\| &\leq \frac{\|S\|^{n-1}}{|\det S|} \end{aligned}$$

である。

$$\text{rank}(NT) = \text{rank}((NT)^*) = \text{rank}(N) = r$$

であるから,

$$\mathcal{R}(NT) + \mathcal{R}(NT)^* = \mathcal{H}(\kappa) \quad (\text{ベクトル空間の和})$$

とおくと,

$$\dim \mathcal{R}(NT) \cap \mathcal{R}((NT)^*)$$

$$= NT \text{ の } 0 \text{ でない固有値の個数} = n(\kappa)$$

に注意して (これは後に証明する),

$$\dim \mathcal{H}(\kappa) = 2r - n(\kappa) \leq 2r,$$

$\mathcal{H}(\kappa)$ および $\mathcal{H}(\kappa)^\perp$ は, $NT(\kappa)$ 従って $S(w)$ で不変であるから, 有限次元空間における作用素に関する先の注意より

$$\|S(w)^{-1}\| \leq \max \left\{ 1, \frac{\|S(w)\|^{2r-n(\kappa)-1}}{|\det S(w)|} \right\}.$$

$\|S(w)\|$ は次のように評価される:

$$\begin{aligned} \|S(w)\| &\leq 1 + |w| \|NT\| \\ &= 1 + \kappa h^* |\log \kappa| \|NT\| \\ &= 1 + \kappa h^* \left| \log \frac{\lambda}{\lambda_0} \right| \|NT\| \\ &= 1 + \kappa h^* \{ |\log |\lambda|| + |\arg \lambda| + |\log |\lambda_0|| \} \|NT\| \\ &\leq 1 + \kappa h^* \{ |\log |\lambda|| + \pi + |\log |\lambda_0|| \} \|NT\|. \end{aligned}$$

次に $N \geq 0$ に注意すると

$$\det S(w) = \det(1 - wNT) = \det(1 - wN^{\frac{1}{2}}TN^{\frac{1}{2}})$$

である。 $T = (1 - \kappa K(\lambda_0))^{-1}$ は自己共役だから, $N^{\frac{1}{2}}TN^{\frac{1}{2}}$ も自己共役となり, 固有値は実数である。 $N^{\frac{1}{2}}TN^{\frac{1}{2}}$ の 0 でない固有値を $\sigma_1(\kappa), \dots, \sigma_r(\kappa)$ とすると, $\underbrace{(\because r \leq r)}_{\text{これらは } NT \text{ の } 0 \text{ でない固有値の全体と一致する (固有値の重複度もこめて)}}$

$$\det S(w) = \prod_{j=1}^r (1 - w\sigma_j(\kappa))$$

より, $S(w)^{-1} = (1 - wNT)^{-1}$ が存在する w は

$$w \sigma_j(\kappa) = 1$$

$$\text{i.e. } w = w_j = \frac{1}{\sigma_j} \quad (j=1, \dots, k)$$

である。 w_j はすべて実数であるから

$$w_j = \kappa h^* \log z_j = \kappa h^* \log \frac{\lambda_j}{\lambda_0}$$

よって定まる $\lambda_j > 0$ によって $(1 - \kappa K(\lambda))^{-1}$ が pole となる λ は λ_j である。これから $k = n(\kappa)$ が得られる。

$$\text{また } \lambda = |\lambda| e^{i\theta} \in \widehat{D}_{\lambda_0} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} |\det S(w)| &= \left| \prod (1 - \kappa h^* \log z \sigma_j(\kappa)) \right| \\ &= \left| \prod (1 - \kappa h^* \log \frac{\lambda}{\lambda_0} \sigma_j(\kappa)) \right| \\ &= \prod |1 - \kappa h^* \{ \log \frac{|\lambda|}{\lambda_0} + i\theta \} \sigma_j(\kappa)|, \end{aligned}$$

$$\kappa h^* \log \frac{\lambda_j}{\lambda_0} = w_j = \frac{1}{\sigma_j}$$

$$\therefore \kappa h^* \sigma_j = (\log \frac{\lambda_j}{\lambda_0})^{-1},$$

よって

$$\begin{aligned} |\det S(w)| &\geq \prod_{j=1}^{n(\kappa)} \left| 1 - \frac{\log |\lambda| - \log \lambda_0}{\log \lambda_j - \log \lambda_0} \right| \\ &\geq (\log 2)^{-n(\kappa)} (\log \beta_0 - \log |\lambda|)^{n(\kappa)}. \end{aligned}$$

以上を合わせて

$$\|S(w)^{-1}\| \leq \begin{cases} C'_\kappa (1 + |\log |\lambda||)^{2r-1-2n(\kappa)}, & n(\kappa) < r, \\ C'_\kappa, & n(\kappa) = r. \end{cases}$$

これで (i) は示された。(ii) は (i) と (i) の結果、および補助定理定理 6 (i) から導かれる。 $0 < \delta \leq \frac{\theta_0}{2}$ なる δ は

$$\kappa C_2 \bar{C}_\kappa (1 + |\log \eta|)^{2r-1-n(\kappa)} \eta^{\varepsilon_0} \leq \frac{1}{2} \quad (0 < \eta \leq \delta)$$

とあるより十分小さくとる。 $\lambda \in D_\delta \subset \tilde{D}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ に対して

$$\begin{aligned} 1 - \kappa G(\lambda) &= 1 - \kappa K(\lambda) - \kappa \lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda) \\ &= \{1 - \kappa \lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda) (1 - \kappa K(\lambda))^{-1}\} (1 - \kappa K(\lambda)), \\ \therefore (1 - \kappa G(\lambda))^{-1} &= (1 - \kappa K(\lambda))^{-1} \{1 - \kappa \lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda) (1 - \kappa K(\lambda))^{-1}\}^{-1} \end{aligned}$$

とあるが, $\lambda \in D_\delta$ ($\Rightarrow |\lambda| \leq \delta$) に対しては

$$\|\kappa \lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda) (1 - \kappa K(\lambda))^{-1}\| \leq \frac{1}{2}$$

だから, $\{1 - \kappa \lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda) (1 - \kappa K(\lambda))^{-1}\}^{-1} \in B(\mathcal{H})$ は存在して,

$$\|\{1 - \kappa \lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda) (1 - \kappa K(\lambda))^{-1}\}^{-1}\| \leq 2.$$

$\lambda \in D_{\frac{\varepsilon_0}{2}} - D_\delta$ に対しては, $(1 - \kappa G(\lambda))^{-1} \in B(\mathcal{H})$ は存在し

て, $B(\mathcal{H})$ のノルムで連続である。(証明了)

\mathbb{C}_+ における Hardy class $\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H})$, $1 < p < \infty$, を導入しよう。 $\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}) \ni f(\lambda) = f(\sigma + i\tau)$ は, \mathbb{C}_+ において \mathcal{H} の値をとる解析関数であり, かつ

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|f(\sigma + i\tau)\|^p d\tau < \infty$$

を満たす。さらに, $f(\sigma + i\tau)$ は $L^p_\tau((-\infty, \infty); \mathcal{H})$ の値をとる σ の関数として, $0 \leq \sigma < \infty$ で連続である。従って $\sigma \rightarrow 0$ のとき, $f(\sigma + i\tau) \rightarrow f(0 + i\tau)$ (in $L^p_\tau((-\infty, \infty); \mathcal{H})$) とあるが, また $f(\sigma + i\tau) \rightarrow f(0 + i\tau)$ (in \mathcal{H} , a.e. τ に対して) でもある。 $\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H})$ は次のノルムによって Banach 空間 ($p=2$ のときは Hilbert 空間) となる:

$$(24) \quad \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(\sigma + i\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}.$$

次の不等式に注意しておこう:

$$(25) \quad \|f(\sigma + i\tau)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(\sigma + i\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq N_p \|f\|_p.$$

\mathcal{G}_0 において skew self-adjoint な A_0 のスペクトル分解を $A_0 = \int -i\lambda dE_0(\omega)$ とし, $E(\omega) = \hat{J} E_0(\omega) \hat{J}^*$ とおく。(この記号を §2 の exponential integral と混同するおそれはないであろう。) $F(\omega)$ が $\lambda=0$ の近傍で絶対連続ならば, $F_0(\omega)$ もそうであり, このとき $E_0(\omega)$, $E(\omega)$ は絶対連続となるが, 条件 (L.2) の下では, $F(\omega)$ は実は解析的なので, 上の条件は又句なくみだされている。明らかに

$$(\lambda - A_0)^{-1} = \int \frac{1}{\lambda + i\lambda} dE_0(\omega),$$

$$(\lambda - A)^{-1} = \hat{J} (\lambda - A_0)^{-1} \hat{J}^* = \int \frac{1}{\lambda + i\lambda} dE(\omega).$$

当分の間, $I_1 = [-1, 1]$, $I_2 = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ と表わすことにする。 $H^*(\lambda - A)^{-1}u$ の評価については, 次の補助定理が成り立つ:

補助定理9. (i) $u \in \mathcal{G}_0$ とすると

$$H^* \hat{J} (\lambda - A_0)^{-1} u = \hat{u}(\lambda) = \hat{u}_1(\lambda) + \hat{u}_2(\lambda),$$

$$\hat{u}_1(\lambda) = H^* \hat{J} (\lambda - A_0)^{-1} E_0(I_1) u \in \mathcal{X}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}) \quad (1 < p < 2),$$

$$\hat{u}_2(\lambda) = H^* \hat{J} (\lambda - A_0)^{-1} E_0(I_2) u \in \mathcal{X}^2(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}),$$

$$(26) \quad \|\hat{u}_1\|_p \leq a_p |h(0)| \|E_0(I_1) u\|$$

$$\|\hat{u}_2\|_2 \leq a_2 |h(0)| \|E_0(I_2)u\|.$$

(ii) $v \in \mathcal{H}$ に対して

$$\hat{v}(\lambda; \mu) = (\lambda - A(\mu))^{-1} v$$

とおくと, $\hat{v}(\lambda; \mu)$ は $\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H})$ ($2 \leq p < \infty$) の値をとる

$\mu \in \mathcal{M} - \{0\}$ の連続関数である。かつ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ として

$$(27) \quad \|\hat{v}(\cdot; \mu)\|_p \leq M_p |\mu|^{-\frac{1}{p'}} \|v\|.$$

(iii) $u \in \mathcal{G}_\gamma$ に対して

$$\tilde{u}(\lambda; \mu) = (\lambda - A(\mu))^{-1} u(\mu)$$

とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\tilde{u}(\lambda; \mu) \in L^2(\mathcal{M} - (-\varepsilon, \varepsilon);$

$\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}))$.

(iv) $x(\mu)$ は ^(有界)可測関数で, $\int |x(\mu)|^2 |\mu|^{-\frac{2}{p_0}} d\mu = C < \infty$ とする。

\mathcal{G}_γ における作用素 X を

$$\mathcal{G}_\gamma \ni u(\mu) \mapsto (Xu)(\mu) = X(\mu)u(\mu) \in \mathcal{G}_\gamma$$

により定義すると (X の定義を適当に拡張して),

$$\begin{aligned} \widehat{Xu}(\lambda; \mu) &= X \tilde{u}(\lambda; \mu) = x(\mu) \tilde{u}(\lambda; \mu) \\ &\in L^{\frac{4}{p}}_\mu(\mathcal{M}; \mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H})), \end{aligned}$$

$$(28) \quad \int \|\widehat{Xu}(\cdot; \mu)\|_p d\mu \leq \sqrt{C} M_p \|u\|_{\mathcal{G}_\gamma} \quad (2 \leq p \leq p_0)$$

従って (作用素 H^* の意味を適当に解釈して)

$$H^*(\lambda - A)^{-1} Xu = H^* \widehat{Xu}(\lambda) \in \mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}),$$

$$(29) \quad \|H^*(\lambda - A)^{-1} Xu\|_p \leq |h(0)| \sqrt{C} M_p \|u\|_{\mathcal{G}_\gamma} \quad (2 \leq p \leq p_0).$$

証明. (i) を示そう。

$$H^* \tilde{J} (\lambda - A_0)^{-1} u = \int \frac{1}{\lambda + i\lambda} d(H^* \tilde{J} E_0(\omega) u)$$

において, $H^* \tilde{J} E_0(\omega) u$ は有界変動, 従って $(E_0(\omega))$ の絶対連続性より) 絶対連続である。なせなら, 有限個の区間 Δ_j をとり, $\sum \Delta_j = \Delta$ とすると

$$\begin{aligned} \sum \|H^* \tilde{J} E_0(\Delta_j) u\| &\leq \sum \|H^* \tilde{J} E_0(\Delta_j)\| \|E_0(\Delta_j) u\| \\ &\leq (\sum \|H^* \tilde{J} E_0(\Delta_j)\|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum \|E_0(\Delta_j) u\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sum \|H^* \tilde{J} E_0(\Delta_j) \tilde{J}^* H\|)^{\frac{1}{2}} \|E(\Delta) u\| \\ &= (\sum \|H^* E(\Delta_j) H\|)^{\frac{1}{2}} \|E(\Delta) u\| \\ &= (\sum \|\int_{\Delta_j} g(\omega) d\omega\|)^{\frac{1}{2}} \|E(\Delta) u\| \\ &\leq (\int_{\Delta} \|g(\omega)\| d\omega)^{\frac{1}{2}} \|u\|, \end{aligned}$$

と (14) と $g(\lambda) = g(-\lambda) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} G(+0+i\lambda)$ より,

$$\begin{cases} 0 \leq g(\lambda) = g(-\lambda) \leq \frac{1}{|\lambda|} |h(0)|^2, \\ 0 \leq g(\lambda) \leq \operatorname{const.} (1 + |\log |\lambda||) |h(0)|^2 \end{cases}$$

に注意すれば, $\|g(\omega)\|$ の (局所) 可積分性がわかる。

$$\frac{d}{ds} (H^* \tilde{J} E_0(s) u) = u(s),$$

$$\frac{d}{ds} (H^* \tilde{J} E_0(s) E_0(I_j) u) = u_j(s) \quad (j=1, 2)$$

とおくと, $u(\omega) = u_1(\omega) + u_2(\omega)$, $u_j(\omega) = 0$ ($\omega \notin I_j$) で

$$(30) \quad \hat{u}_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda + i\lambda} u_j(s) ds.$$

ただし $\hat{u}_2(\lambda)$ の積分は, 任意の有限区間で通常の意味の Bochner 積分の意味であるが, $|\lambda|$ の大きい所では弱位相による積分とする。Kato [1] に従って $S(\lambda) = \left\{ \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} (\lambda - A_0)^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} =$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \{ (\lambda - A_0)^{-1} - (-\bar{\lambda} - A_0)^{-1} \}^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad \text{と おく。} \quad \lambda = \sigma + i\tau$$

$\in \mathbb{C}_+$ のとき, $-\bar{\lambda} = -\sigma + i\tau$ に注意する。

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_2(\lambda) - \hat{u}_2(-\bar{\lambda})\|^2 &= \|\hat{H}^* \hat{J} \{ (\lambda - A_0)^{-1} - (-\bar{\lambda} - A_0)^{-1} \} E_0(I_2) u\|^2 \\ &= 4\pi^2 \|\hat{H}^* \hat{J} S(\lambda)^2 E_0(I_2) u\|^2 \\ &\leq 4\pi^2 \|\hat{H}^* \hat{J} S(\lambda)\|^2 \|S(\lambda) E_0(I_2) u\|^2 \\ &= 4\pi^2 \|\hat{H}^* \hat{J} S(\lambda)^2 \hat{J}^* H\| (S(\lambda)^2 E_0(I_2) u, E_0(I_2) u) \\ &= \|\hat{H}^* \hat{J} \operatorname{Re} (\lambda - A_0)^{-1} \hat{J}^* H\| \\ &\quad \times (\{ (\lambda - A_0)^{-1} - (-\bar{\lambda} - A_0)^{-1} \} E_0(I_2) u, E_0(I_2) u) \\ &\stackrel{2}{=} \|\operatorname{Re} G(\lambda)\| (\{ (\lambda - A_0)^{-1} - (-\bar{\lambda} - A_0)^{-1} \} E_0(I_2) u, E_0(I_2) u) \end{aligned}$$

であるから, $I_n = (-n, -1) \cup (1, n)$ に對して

$$\begin{aligned} &\int_{I_n} \|\hat{u}_2(\sigma + i\tau) - \hat{u}_2(-\sigma + i\tau)\|^2 d\sigma \\ &\leq 2 \sup_{\tau \in I_n} \|\operatorname{Re} G(\sigma + i\tau)\| \int_{I_n} d\sigma \int \frac{2\sigma}{\sigma^2 + (\tau + \lambda)^2} d\|E_0(\lambda) E_0(I_2) u\| \\ &\leq 2 \sup_{\tau \in I_n} \|\operatorname{Re} G(\sigma + i\tau)\| \cdot 2\pi \|E_0(I_2) u\|^2. \end{aligned}$$

他方 $\hat{u}_2(\sigma + i\tau) - \hat{u}_2(-\sigma + i\tau) \rightarrow 2\pi u_2(-\tau)$ (in \mathcal{G}_0 as $\sigma \downarrow 0$) が a.e. τ に對して成り立つので, Fatou の定

理によつて

$$\int_{I_n} 4\pi^2 \|u_2(-\tau)\|^2 d\tau \leq 2\pi |h(0)|^2 \cdot 2\pi \|E_0(I_2) u\|^2.$$

$u_2(\tau) = 0$, $\tau \in (-1, 1)$, であるから, $n \rightarrow \infty$ とし

$$(31) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \|u_2(\omega)\|^2 d\omega \leq |h(0)|^2 \|E_0(I_2) u\|^2.$$

同様の計算を $\hat{u}_1(\lambda)$ についで実行すると, $1 < p < 2$ のとき

$$(32) \quad \int_{-1}^1 \|u_1(\omega)\|^p d\omega \leq \left(\int_{-1}^1 \|g(\omega)\|^{q_1} d\omega \right)^{\frac{1}{q_2}} \|E_0(I_1) u\|^p,$$

ただし $\theta_1 = \frac{p}{2-p} = \frac{2}{2-p} - 1 > 1$, $\theta_2 = \frac{2}{2-p}$. ($\|g(\omega)\|^{\theta_1}$ は $(-\infty, \infty)$ で可積分であるから, 定は $u(\lambda) \in L^p((-\infty, \infty); \mathcal{H})$.)

(30), (31) および (32) から, (i) の結論は明らかである.

(ii) から (iii), (iii) から (iv) を導くことは容易なので, (ii) を示そう.

$$\begin{aligned}\widehat{v}(\lambda; \mu) &= (\lambda - A(\mu))^{-1} v \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA(\mu)} v dt\end{aligned}$$

であるが, 次のようにおく:

$$(33) \quad v(t; \mu) = e^{tA(\mu)} v = \begin{cases} e^{-t\mu L} v, & \mu > 0, \\ e^{t\mu L^*} v, & \mu < 0. \end{cases}$$

$v(t; \mu)$ は $\mu \neq 0$ において $L^1_t((0, \infty); \mathcal{H}) \cap L^2_t((0, \infty); \mathcal{H})$ の値をとる連続関数であり, $1 \leq p' \leq \infty$ に対して

$$\begin{aligned}(34) \quad \int_0^\infty \|v(t; \mu)\|^{p'} dt &\leq \int_0^\infty \|e^{tA(\mu)}\|^{p'} dt \|v\|^{p'} \\ &\leq M^{p'} \frac{1}{p|\mu|} \|v\|^{p'} \leq \frac{M^{p'}}{\alpha} \frac{1}{|\mu|} \|v\|^{p'}.\end{aligned}$$

(ただし条件 (L.2) を用いた.) $\widehat{v}(\lambda; \mu)$ は $v(t; \mu)$ の Laplace 変換であるから, $\mu \neq 0$ において $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}) \cap \mathcal{A}^2(\mathbb{C}_+; \mathcal{H})$ の値をとる連続関数, かつ interpolation より

$$\begin{aligned}(35) \quad \|\widehat{v}(\sigma + i\cdot; \mu)\|_p &\leq (2\pi)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\infty \|v(t; \mu)\|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq M_p |\mu|^{-\frac{1}{p'}} \|v\| \quad (0 \leq \sigma < \infty),\end{aligned}$$

ただし $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ より $p \geq 2$ を定めた. (証明了)

補助定理 9 から $\Sigma(t)$ の性質を導びいてみよう. (21), (22) より

$$Z_\eta(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\eta}^{\sigma+i\eta} e^{\lambda t} \zeta(\lambda) Q' u \, d\lambda \quad (u \in \mathcal{D}(A)),$$

$$\zeta(\lambda) = \kappa(\lambda-A)^{-1} H \{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1} H^*(\lambda-A)^{-1}$$

とすると, $\eta \rightarrow \infty$ のとき

$$Z_\eta(t)u \longrightarrow Z(t)u \quad (\text{in } \mathcal{E}_\eta = L^2(\mathcal{M}; \mathcal{H})).$$

従って, 適当な数列 $\eta_n \uparrow \infty$ に對し

$$Z_{\eta_n}(t)u(\mu) \longrightarrow Z(t)u(\mu) \quad (\text{a.e. } \mu).$$

故に, 任意の $v \in \mathcal{H}$ に對し

$$\begin{aligned} (Z(t)u(\mu), v)_{\mathcal{H}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\eta_n}^{\sigma+i\eta_n} e^{\lambda t} (\zeta(\lambda) Q' u(\mu), v)_{\mathcal{H}} \, d\lambda \\ &= (\zeta(\lambda) Q' u(\mu), v)_{\mathcal{H}} \\ &= \kappa (H \{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1} H^*(\lambda-A)^{-1} Q' u, (\bar{\lambda}-A(\mu)^*)^{-1} v)_{\mathcal{H}} \\ &= \kappa h(\mu) (\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1} H^* \tilde{J}(\lambda-A_0)^{-1} \tilde{J}^* \overset{Q'}{u}, \tilde{v}^*(\bar{\lambda}; \mu))_{\mathcal{H}} \\ &\quad \tilde{v}^*(\bar{\lambda}; \mu) = (\bar{\lambda}-A(\mu)^*)^{-1} v \in \mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}) \quad (2 \leq p), \\ &\quad \underbrace{\text{for } \mu \neq 0} \\ &= H^* \tilde{J}(\lambda-A_0)^{-1} \tilde{J}^* Q' u \\ &= H^* \tilde{J}(\lambda-A_0)^{-1} E_0(I_1) \tilde{J}^* Q' u + H^* \tilde{J}(\lambda-A_0)^{-1} E_0(I_2) \tilde{J}^* Q' u \\ &= \hat{w}_1(\lambda) + \hat{w}_2(\lambda), \\ &\quad \hat{w}_1(\lambda) \in \mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}) \quad (1 < p < 2), \\ &\quad \hat{w}_2(\lambda) \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}) \end{aligned}$$

などと, 補助定理 1 (iii) と 8 (ii) から評価:

$$(36) \quad \|\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}\| \leq \begin{cases} C\kappa, \frac{\beta_0}{4}, & |Im \lambda| \geq \frac{\beta_0}{4} \\ C\kappa(1+|\log |\lambda||)^{2r-1}, & \lambda \in D_{\frac{\beta_0}{2}} \end{cases}$$

を合すると (2.5.4)

$$\begin{aligned}
& (\zeta(\sigma+i\tau) Q'u(\mu), v)_{\mathcal{H}} \\
&= \kappa h(\mu) (\{1-\kappa G(\sigma+i\tau)\}^{-1} \{\hat{w}_1(\sigma+i\tau) + \hat{w}_2(\sigma+i\tau)\}, \tilde{v}^*(\sigma-i\tau; \mu))_{\mathcal{H}} \\
&= \kappa h(\mu) (\{1-\kappa G(\sigma+i\tau)\}^{-1} \hat{w}_1(\sigma+i\tau), \tilde{v}^*(\sigma-i\tau; \mu))_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \kappa h(\mu) (\{1-\kappa G(\sigma+i\tau)\}^{-1} \hat{w}_2(\sigma+i\tau), \tilde{v}^*(\sigma-i\tau; \mu))_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

は, $L^1_r(-\infty, \infty)$ の値をとり (σ, μ) の連続関数となる ($t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \sigma < \frac{p_0}{2}$, $\mu \neq 0$). 従って $(Z(t)u(\mu), v)_{\mathcal{H}}$ を表わす Laplace 逆変換は絶対収束し, かつ $\sigma \rightarrow 0$ とする z とが与えられる:

$$\begin{aligned}
(Z(t)u(\mu), v)_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\zeta(\sigma+i\tau)}^{e^{i\tau t}} Q'u(\mu), v)_{\mathcal{H}} d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa h(\mu) \overbrace{\{1-\kappa G(\sigma+i\tau)\}^{-1}}^{e^{i\tau t}} \{\hat{w}_1(\sigma+i\tau) + \hat{w}_2(\sigma+i\tau)\}, \tilde{v}^*(\sigma-i\tau; \mu))_{\mathcal{H}} d\tau.
\end{aligned}$$

ここで $p > 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < q < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p'} = 1$ とし

$$\begin{aligned}
|\int_{|m| \geq 1} &| \leq \kappa |h(\omega)| C_{\kappa,1} (\|\hat{w}_1\|_p, \|\tilde{v}^*(\cdot; \mu)\|_p + \|\hat{w}_2\|_2 \|\tilde{v}^*(\cdot; \mu)\|_2), \\
|\int_{|m| \leq 1} &| \leq \kappa |h(\omega)| C'_{\kappa,1} (\|\hat{w}_1\|_q \|\tilde{v}^*(\cdot; \mu)\|_p + \|\hat{w}_2\|_2 \|\tilde{v}^*(\cdot; \mu)\|_p), \\
C'_{\kappa,1} &= \left(\int_{-1}^1 \|(1-\kappa G(\sigma+i\tau))^{-1}\|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

に補助定理 9 (i), (ii) を適用して

$$\begin{aligned}
|(Z(t)u(\mu), v)_{\mathcal{H}}| &\leq \kappa M_p(\kappa) |h(\omega)|^2 |\mu|^{-\frac{1}{p'}} \|u\|_{\mathcal{H}_p} \|v\|_{\mathcal{H}}, \\
\therefore \|(Z(t)u)(\mu)\|_{\mathcal{H}} &\leq \kappa M_p(\kappa) |h(\omega)|^2 |\mu|^{-\frac{1}{p'}} \|u\|_{\mathcal{H}_p} \quad (u \in \mathcal{D}(A)).
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}(A)$ は \mathcal{H}_p で dense であるから, \mathcal{H}_p から \mathcal{H} への作用素:

$$\mathcal{H}_p \ni u \longmapsto Z(t; \mu)u = (Z(t)u)(\mu) \in \mathcal{H}$$

は有界作用素となり, かつ \mathcal{H}_p から \mathcal{H} への作用素のノルムは

$$(37) \quad \|Z(t; \mu)\| \leq \kappa M_p(\kappa) |h(\omega)|^2 |\mu|^{-\frac{1}{p'}} \quad (1 < p' < 2).$$

また, $p > 2$ を固定し, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ なる p' に對して

$$(38) \quad \int_{-1}^1 |x(\mu)|^2 |\mu|^{-\frac{2}{p'}} d\mu = C^2 < \infty$$

をみたす有界可測関数 $x(\mu)$ をとると

$$\begin{aligned} \|XZ(t)u\|_{\mathcal{H}} &= \left(\int |x(\mu)|^2 \| (Z(t)u)(\mu) \|_{\mathcal{H}}^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \kappa M_p(\kappa) C |h(\omega)|^2 \|u\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

$$(39) \quad \therefore \|XZ(t)\| \leq \kappa M_p(\kappa) C |h(\omega)|^2.$$

($\kappa > 0$, $\kappa^{-1} \notin \Lambda_e$ とする.)

定理 3. 半群 $e^{tB(\kappa)}$ は次のように '分解' される:

$$(20) \quad \begin{cases} e^{tB(\kappa)} = e^{tA} Q'(\kappa) + Z(t, \kappa) + \sum_{n=1}^{N(\kappa)} e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n(\kappa) \\ Z(t, \kappa) = (e^{tB(\kappa)} - e^{tA}) Q'(\kappa), \end{cases}$$

(i) \mathcal{H} から \mathcal{H} への作用素 $Z(t, \kappa; \mu)$:

$$\mathcal{H} \ni u \longmapsto Z(t, \kappa; \mu)u = (Z(t, \kappa)u)(\mu) \in \mathcal{H}$$

は有界作用素となり, そのノルムは (37) で評価される,

(ii) $1 < p' < 2$ に対して, (38) をみたす有界可測関数 $x(\mu)$ をとると, \mathcal{H} における作用素 $XZ(t, \kappa)$ のノルムは (39) で評価され, t に因りて一様有界である,

(iii) 任意の $u \in \mathcal{H}$ に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき

$$Z(t, \kappa; \mu)u \rightarrow 0 \quad (\text{in } \mathcal{H}, \mu \neq 0)$$

$$XZ(t, \kappa)u \rightarrow 0 \quad (\text{in } \mathcal{H}).$$

証明. (iii) のみを示す。 $u \in \mathcal{H}$, $v \in \mathcal{H}$ に対して ($t > 0$)

$$(40) \quad (Z(t; \mu)u, v)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} (\zeta(0+i\tau) Q'u(\mu), v)_{\mathcal{H}} d\tau,$$

ただし $(\zeta(0+i\tau) Q'u, v)_{\mathcal{H}}$ は便宜的な記法である。

また補助定理 9 (iv) より, 定理 3 の $\kappa(\mu)$ をとると, $u, w \in \mathcal{G}_\gamma$ に対して, $t > 0$ のとき

$$(41) \quad (XZ(t)u, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} (\zeta(\sigma+i\tau) Q'u, w)_{\mathcal{G}_\gamma} d\tau.$$

われわれの目標は, $t \rightarrow \infty$ のとき $Z(t; \mu)u \rightarrow 0$ (in \mathcal{H} for $a.e. \mu$) および $XZ(t)u \rightarrow 0$ (in \mathcal{G}_γ) であるから, Laplace 逆変換の性質をもつ (調べてみることにする。積分範囲を $I_1 = [-1, 1]$ と $I_2 = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ にわけて考えよう。まず I_1 では定理 3 の証明と同様にして

$$\begin{aligned} \zeta(\lambda) Q'u(\mu) &= \kappa(\lambda - A)^{-1} H \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} H^* (\lambda - A)^{-1} u(\mu) \\ &= \kappa(\lambda - A(\mu))^{-1} h(\mu) \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} H^* \tilde{J} (\lambda - A_0)^{-1} \tilde{J} u \\ &= \kappa h(\mu) (\lambda - A(\mu))^{-1} \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} \{\hat{w}_1(\lambda) + \hat{w}_2(\lambda)\}, \\ \hat{w}_1(\lambda) &\in \mathcal{H}^g(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}) \quad (1 < g < 2), \\ \hat{w}_2(\lambda) &\in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+; \mathcal{H}) \end{aligned}$$

であり, $\{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1}$ の評価 (36) と合わせて

$$v(\lambda) = \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} \{\hat{w}_1(\lambda) + \hat{w}_2(\lambda)\}, \quad \lambda = \sigma + i\tau$$

は, $L^1_\gamma(I_1; \mathcal{H})$ の値をとる $\sigma \geq 0$ の連続関数である。また, 仮定は $\mu > 0$ を固定すると

$$(\lambda - A(\mu))^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\mu L} dt$$

は, \mathbb{C}_+ で解析的であり, かつ $\lambda \in \mathbb{C}_+$ のとき有界である。従って $\mu \neq 0$ のとき

$$\zeta(\sigma + i\tau) Q'u(\mu) = \kappa h(\mu) (\sigma + i\tau - A(\mu))^{-1} v(\sigma + i\tau)$$

は $L^1_\gamma(I_1; \mathcal{H})$ の値をとる $\sigma \geq 0$ の連続関数となり, 特に

$$\zeta(\sigma + i\tau) Q'u(\mu) = \kappa h(\mu) (i\tau - A(\mu))^{-1} v(\sigma + i\tau)$$

は $L^1_\gamma(I_1; \mathcal{H})$ に属する。故に, (40) における積分は, I_1 に関して Bochner 積分の意味にとるこゝがせき, かつ

$$\int_{I_1} e^{i\tau t} \zeta(\sigma + i\tau) Q'u(\mu) d\tau \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

となる (Riemann Lebesgue の定理)。

次に $u \in \mathcal{D}(A)$ とし, I_2 で考えよう。 $Q'u \in \mathcal{D}(A) =$

$\mathcal{D}(B)$ であるから, $\lambda(\lambda - B)^{-1} - B(\lambda - B)^{-1} = 1$ を用いて

(かつ $BQ'u = Q'Bu$)

$$(\lambda - B)^{-1} Q'u = \frac{1}{\lambda} Q'u + \frac{1}{\lambda} (\lambda - B)^{-1} B Q'u.$$

(8) より $\{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} H^*(\lambda - A)^{-1} = H^*(\lambda - B)^{-1}$ であるから

$$\begin{aligned} \zeta(\lambda) Q'u &= \kappa (\lambda - A)^{-1} H H^* (\lambda - B)^{-1} Q'u \\ &= \frac{\kappa}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} H H^* \{Q'u + (\lambda - B)^{-1} B Q'u\} \\ &= \frac{\kappa}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} H H^* Q'u \\ &\quad + \frac{\kappa}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} H \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} H^* (\lambda - A)^{-1} B Q'u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \zeta(\lambda) Q'u(\mu) \\ &= \frac{\kappa}{\lambda} h(\mu) (\lambda - A(\mu))^{-1} H^* Q'u \\ &\quad + \frac{\kappa}{\lambda} h(\mu) (\lambda - A(\mu))^{-1} \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} H^* (\lambda - A)^{-1} B Q'u \\ &= \zeta_1(\lambda) Q'u(\mu) + \frac{1}{\lambda} \zeta(\lambda) Q'Bu(\mu). \end{aligned}$$

$$H^*(\lambda - A)^{-1} B Q'u = H^* \tilde{J} (\lambda - A_0)^{-1} \tilde{J}^* B Q'u \quad \text{に補助定理 9 (i)}$$

を適用し, $\{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1}$ の評価 (36) を用い, さらに前述の

$(\lambda - A(\mu))^{-1}$ の性質に注意すると, $\frac{1}{\sigma + i\tau} \zeta(\sigma + i\tau) Q'Bu(\mu)$ は

($\mu \neq 0$ のとき)

$L'_\gamma(I_2; \mathcal{H})$ の値をとる $\delta \geq 0$ の連続関数となることがわかる。特に $\sigma = 0$ とおけば, $\frac{1}{i\gamma} \zeta(0+i\gamma) Q' B u(\mu) \in L'_\gamma(I_2; \mathcal{H})$ であり, (40) の I_2 における積分のうち, $e^{i\gamma t} \frac{1}{i\gamma} \zeta(0+i\gamma) Q' B u(\mu)$ に関する部分は, Bochner 積分の意味にとることになり,

$$\int_{I_2} e^{i\gamma t} \frac{1}{i\gamma} \zeta(0+i\gamma) Q' B u(\mu) d\gamma \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

$\zeta_1(\lambda) Q' u(\mu) = \frac{K}{\lambda} h(\mu) (\lambda - A(\mu))^{-1} H^* Q' u$ の評価を出すためには, 作用素の分数中の理論が必要である。これについていくらかの事実を述べておこう。

補助定理 10. (Kato [2]) L は Hilbert 空間 \mathcal{H} における maximal dissipative な作用素とする。

(i) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ のとき, $(-L)^\alpha$ と $(-L^*)^\alpha$ とは comparable:

$$\begin{aligned} \text{i.e. } \left\{ \begin{aligned} \mathcal{D}((-L)^\alpha) &= \mathcal{D}((-L^*)^\alpha) = \mathcal{D}_\alpha \supset \mathcal{D}(L), \\ d_\alpha^{-1} \|(-L)^\alpha v\| &\leq \|(-L^*)^\alpha v\| \leq d_\alpha \|(-L)^\alpha v\|. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

(ii) $L^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在するならば, $0 < \beta < 1$ に対して

$$\|(-L)^{-\beta} v\| \leq b_\beta \|L^{-1} v\|^\beta \|v\|^{1-\beta} \quad (v \in \mathcal{H}).$$

(iii) $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ に対して $(\lambda - L)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在して

$$\|(\lambda - L)^{-1}\| \leq C \quad (\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+)$$

が成り立つならば, $0 < \beta < 1$ に対して ($v \in \mathcal{D}((-L)^\beta)$ のとき)

$$\|(\lambda - L)^{-1} v\| \leq b_\beta |\lambda|^{-\beta} (\|L^{-1}\| + C) \|(-L)^\beta v\|.$$

証明. (i) は Kato [2] による。 $L^{-1} \in B(\mathcal{H})$ が存在すると

とき, $(-L)^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) は次のように表わされる:

$$(-L)^{-\alpha} v = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda - L)^{-1} v \, d\lambda.$$

故に $v \in \mathcal{D}(L)$ のとき

$$\begin{aligned} (-L)^{1-\alpha} v &= (-L)^{-\alpha} (-L) v \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left(\int_0^\eta + \int_\eta^\infty \right) \lambda^{-\alpha} (\lambda - L)^{-1} (-L) v \, d\lambda. \end{aligned}$$

L は maximal dissipative であるから

$$\|(\lambda - L)^{-1} (-L) v\| \leq \lambda^{-1} \|L v\|,$$

$$\|L(\lambda - L)^{-1}\| = \|\lambda(\lambda - L)^{-1} - 1\| \leq 1,$$

$$\therefore \left\| \int_0^\eta \right\| \leq \int_0^\eta \lambda^{-\alpha} \, d\lambda \|v\| = \frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|v\|,$$

$$\left\| \int_\eta^\infty \right\| \leq \int_\eta^\infty \lambda^{-(\alpha+1)} \, d\lambda \|L v\| = \frac{\eta^{-\alpha}}{\alpha} \|L v\|.$$

$$\eta = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\|L v\|}{\|v\|} \quad \text{とおくと, } \sin \pi \alpha = \sin \pi(1-\alpha) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \|(-L)^{1-\alpha} v\| &\leq \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} 2 \alpha^{-(1-\alpha)} (1-\alpha)^{-\alpha} \|v\|^\alpha \|L v\|^{1-\alpha} \\ &\leq 2 \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\sin \pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)} \right)^\alpha \|v\|^\alpha \|L v\|^{1-\alpha} \\ &= b_\alpha \|v\|^\alpha \|L v\|^{1-\alpha}, \quad b_\alpha \leq 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|(-L)^{-\beta} v\| &= \|(-L)^{1-\beta} \cdot (-L)^{-1} v\| \\ &\leq b_\beta \|L^{-1} v\|^\beta \|v\|^{1-\beta}. \end{aligned}$$

よって (ii) は示された。(iii) は

$$\begin{aligned} \|L^{-1}(\lambda - L)^{-1}\| &= \left\| \frac{1}{\lambda} L^{-1} + \frac{1}{\lambda} (\lambda - L)^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} (\|L^{-1}\| + C) \end{aligned}$$

に注意して, (ii) を適用すると

$$\begin{aligned} \|(-L)^{-\beta}(\lambda - L)^{-1} v\| &\leq b_\beta \|L^{-1}(\lambda - L)^{-1} v\|^\beta \|(\lambda - L)^{-1} v\|^{1-\beta} \\ &\leq b_\beta \frac{1}{|\lambda|} (\|L^{-1}\| + C)^\beta C^{1-\beta} \|v\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \|(\lambda - L)^{-1} v\| &= \|(-L)^{-\beta} (\lambda - L)^{-1} (-L)^{\beta} v\| \\ &\leq b_{\beta} |\lambda|^{-\beta} (\|L^{-1}\| + C) \|(-L)^{\beta} v\|.\end{aligned}$$

さて、われわれの問題にもどると

$$(-A)^{\alpha} = ((-A(\mu))^{\alpha}), \quad (-A(\mu))^{\alpha} = \begin{cases} \mu^{\alpha} (-L)^{\alpha}, & \mu > 0 \\ (-\mu)^{\alpha} (-L^*)^{\alpha}, & \mu < 0 \end{cases}$$

であるから、容易に

$$\mathcal{D}((-A)^{\alpha}) \supset \mathcal{D}(A),$$

$$\|(-A)^{\alpha} u\| \leq b_{\alpha} \|Au\|^{\alpha} \|u\|^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

がわかる。次の補助定理が成り立つ：

補助定理 II. ある β , $0 < \beta < \frac{1}{2}$, に對して $u \in \mathcal{D}((-A)^{\beta})$

とすると, $H^* u \in \mathcal{D}((-L)^{\beta}) = \mathcal{D}((-L^*)^{\beta}) = \mathcal{D}_{\beta}$, かつ

$$\|(-L)^{\beta} H^* u\| \leq \frac{1 + d_{\beta}}{1 - 2\beta} |h(0)| \|(-A)^{\beta} u\|,$$

$$\|(-L^*)^{\beta} H^* u\| \leq \frac{1 + d_{\beta}}{1 - 2\beta} |h(0)| \|(-A)^{\beta} u\|.$$

証明. 次の計算を適当に正当化すればよい：

$$\begin{aligned}(-L)^{\beta} \int_0^1 \overline{h(\mu)} u(\mu) d\mu &= \int_0^1 \overline{h(\mu)} (-L)^{\beta} u(\mu) d\mu \\ &= \int_0^1 \overline{h(\mu)} \mu^{-\beta} (-A(\mu))^{\beta} u(\mu) d\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(-L)^{\beta} \int_0^1 \overline{h(\mu)} u(\mu) d\mu\| &\leq |h(0)| \int_0^1 \mu^{-\beta} \|(-A(\mu))^{\beta} u(\mu)\| d\mu \\ &\leq |h(0)| \left(\frac{1}{1-2\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \|(-A)^{\beta} u\|,\end{aligned}$$

$$(-L^*)^{\beta} \int_{-1}^0 \overline{h(\mu)} u(\mu) d\mu = \int_{-1}^0 \overline{h(\mu)} (-\mu)^{-\beta} (-A(\mu))^{\beta} u(\mu) d\mu,$$

$$\|(-L^*)^{\beta} \int_{-1}^0 \overline{h(\mu)} u(\mu) d\mu\| \leq |h(0)| \left(\frac{1}{1-2\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \|(-A)^{\beta} u\|.$$

上の計算に補助定理 10 (i) を適用すれば、証明す。

補助定理 11 を利用して $\zeta_1(\lambda) Q'u(\mu)$ が入る積分を処理することができる。

$$\zeta_1(\lambda) Q'u(\mu) = \frac{\chi}{\lambda} h(\mu) (\lambda - A(\mu))^{-1} H^* Q'u$$

において、 $Q'u \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}((-A)^\beta)$ ($0 < \beta < \frac{1}{2}$) である。

たとえば $\mu > 0$ のとき

$$\begin{aligned} (\lambda - A(\mu))^{-1} H^* Q'u &= (\lambda - \mu L)^{-1} H^* Q'u \\ &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} - L \right)^{-1} H^* Q'u, \\ \|(\lambda - A(\mu))^{-1} H^* Q'u\| &= \frac{1}{\mu} \left\| \left(\frac{\lambda}{\mu} - L \right)^{-1} H^* Q'u \right\| \\ &\leq \frac{1}{\mu} b_\beta \left(\frac{|\lambda|}{\mu} \right)^{-\beta} (\|L^{-1}\| + C_0) \|(-L)^\beta H^* Q'u\| \\ &\leq b_\beta (\|L^{-1}\| + C_0) |\lambda|^{-\beta} \mu^{\beta-1} \cdot \frac{1 + d_\beta}{1 - 2\beta} |h(0)| \|(-A)^\beta Q'u\|, \\ &(\text{ただし } \|(\lambda - L)^{-1}\| \leq C_0, \lambda \in \mathbb{C}_+, \text{ とする}). \end{aligned}$$

これより $\lambda \in \mathbb{C}_+$ のとき

$$\begin{aligned} \|\zeta_1(\lambda) Q'u(\mu)\|_{\mathcal{H}} &\leq \text{const.} \times |\mu|^{\beta-1} |\lambda|^{-1-\beta} |h(0)|^2 \\ &\quad \times \|(-A)^\beta u\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

であり、 $\zeta_1(\lambda)$ は $\mathbb{C}_+ - \{0\}$ で解析的であるから、 $\zeta_1(\sigma + i\tau) Q'u$ は $L^1_\tau(I_2; \mathcal{H})$ の値をとる $\sigma \geq 0$ の連続関数となる。従って前と同様の議論により、 $t \rightarrow \infty$ のとき ($\mu \neq 0 \in \mathbb{R}$)

$$\int_{I_2} e^{i\tau t} \zeta_1(\sigma + i\tau) Q'u(\mu) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{H}.$$

以上の結果をあわせると, $\mu \neq 0$, $u \in \mathcal{D}(A)$ に対して

$$Z(t; \mu) u \rightarrow 0 \quad (\text{in } \mathcal{H} \text{ as } t \rightarrow \infty)$$

が得られる。定理3より $Z(t; \mu)$ は t について一様有界,

$\mathcal{D}(A)$ は \mathcal{E}_μ で dense であるから, 任意の $u \in \mathcal{E}_\mu$ に対して,

$\mu \neq 0$ のとき

$$Z(t; \mu) u \rightarrow 0 \quad (\text{in } \mathcal{H} \text{ as } t \rightarrow \infty).$$

を得る。

また (38) を満たす有界可測関数 $x(\mu)$ をとると, $u \in \mathcal{E}_\mu$ に対して

$$(X Z(t) u)(\mu) = x(\mu) Z(t; \mu) u$$

$$\therefore \|(X Z(t) u)(\mu)\|_{\mathcal{H}} \leq M_p(x) |h(\mu)|^2 |x(\mu)| |\mu|^{-\frac{1}{p}} \in L^2(\mathcal{M}),$$

$$(X Z(t) u)(\mu) = x(\mu) Z(t; \mu) u \rightarrow 0 \quad (\text{a.e. } \mu)$$

が成り立つので, Lebesgue の収束定理によつて

$$X Z(t) u \rightarrow 0 \quad (\text{in } \mathcal{E}_\mu \text{ as } t \rightarrow \infty)$$

を得る。(定理3の証明了。)

半群 e^{tA} の次の性質は明らかである:

$$(e^{tA} u)(\mu) = e^{tA(\mu)} u(\mu) \quad (\text{a.e. } \mu),$$

$$\|(e^{tA} u)(\mu)\|_{\mathcal{H}} \leq \|u(\mu)\| \in L^2_\mu(\mathcal{M}),$$

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき } \|e^{tA(\mu)} u(\mu)\|_{\mathcal{H}}$$

$$\leq M e^{-\alpha|\mu|t} \|u(\mu)\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0 \quad (\text{a.e. } \mu).$$

従ってまた Lebesgue の収束定理より

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき } \|e^{tA} u\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0.$$

以上のことと、定理 3 とから次の定理は明らかである:

定理 4. $\kappa > 0$, $\kappa^{-1} \in \Lambda_e$ とする. $e^{tB(\kappa)}$ の分解:

$$\begin{cases} e^{tB(\kappa)} = e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) + \sum_{n=1}^{N(\kappa)} e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n(\kappa), \\ Q'(\kappa) = 1 - \sum Q_n(\kappa) \end{cases}$$

において, $e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa)$ は次の性質をもつ:

(i) 任意の $u \in \mathcal{H}_\gamma$ に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき

$$(e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u)(\mu) \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{H} \text{ (a.e. } \mu),$$

(ii) $1 < p' < 2$ に対して (38) をみたす有界可測関数

$\chi(\mu)$ をとると, 任意の $u \in \mathcal{H}_\gamma$ に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\chi e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{H}_\gamma,$$

(iii) \mathcal{H}_γ の作用素 X として, $\varepsilon < 1$ 次の X_ε をとると,

$$\mathcal{H}_\gamma \ni u \mapsto (X_\varepsilon u)(\mu) = \begin{cases} u(\mu), & |\mu| > \varepsilon \\ 0, & |\mu| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

$t \rightarrow \infty$ のとき

$$X_\varepsilon e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{H}_\gamma,$$

$$\text{i.e. } \int_{|\mu| > \varepsilon} \|(e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u)(\mu)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu \rightarrow 0.$$

§4 補足

論じ残した問題がいくつかあるので、若干の comment をつけ加えておく。

1. $B(k)$ の parameter k に関する解析性は、かなり面白い (数学的には) 問題であると思われる。ここでは、 $e^{tB(k)}$, $Q'(k)$ などが、区間 $(\frac{1}{p_n^*}, \frac{1}{p_{n+1}^*})$ で実解析的であることのみを指摘しておく。

2. ① 関数 $h(\mu)$ の条件をゆるめる、あるいは② 振動 HH^* は本質的には '1 次元の振動' であつたが、これを 'm 次元の振動' にする、さらには③ L の条件を変更する (たとえば $(L, 2)$ を $(L, 2')$ に) などの方向の一般化は当然考えられる。それぞれの場合に、定理 2, 3, 4 に相当する結果を得ることが出来るけれども、①, ② の場合は、かなり制限された結果になる。③ の場合は、decay という現象はおこらない。

3. 具体的な問題 (I) は、必ずしも $\mathcal{H} = L^2(-a, a)$, $\mathcal{H}_0 = L^2(M; \mathcal{H})$ の中で解かれる必要はない。 \mathcal{H} のかわりに $L^1(-a, a)$, あるいは区分的に連続な関数の空間 $\check{C}[-a, a]$ をとり、これに応じて \mathcal{H}_0 の代わりに $\mathcal{H}_0 = L^1(M; \mathcal{H})$ あるいは $\mathcal{H}_0 = \mathcal{C}(M; \check{C}[-a, a])$ をとることもできる。この場合はまたよく考えてないが、 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ の関係をうまく使い、作用素 L の条件を適当に設定しておけば、定理 2, 4 に相当する

(いくさか弱い) 結果を示すことができると思われる。

4. \mathcal{H}_0 における A_0 と $B_0(k)$ との関係については、向
も述べることはできなかった。 \mathcal{H}_0 において、 A_0 は skew
self adjoint であるから、unitary 群 e^{itA_0} を生成する。

$B_0(k)$ のスペクトル $\sigma(B_0(k)) = \{i\mathbb{R}\} \cup \{\beta_1(k), \dots, \beta_{N(k)}(k)\}$
であり、固有値 $\beta_n(k)$ の固有空間への projection を $Q_{0,n}(k)$
とすると、 $\sum Q_{0,n}(k) = Q_0'(k)$ が成り立つ。 $Q_0'(k) = 1 -$
 $\sum Q_{0,n}(k)$ とおくと、 $B_0(k)Q_0'(k)$ と A_0 とは (partial)
similar となり、(local) wave operator が存在する。従
って、0 の近傍を除き、 $B_0(k)Q_0'(k)$ のスペクトル分解を作る
ことができる。

文 献

- [1] Kato, T., Wave operators and similarity for some non-self adjoint operators, *Math. Ann.*, 162 (1966) 258-279.
- [2] ———, Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan*, 13 (1961), 246-274.
- [3] ———, Perturbation theory for linear operators, Springer, (1966)
- [4] Lehner, J. and Wing, G.M., On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955) 217-234.
- [5] ———, Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry, *Duke Math. J.*, 23 (1956) 125-142.
- [6] Lehner, J., The spectrum of the neutron transport operator for the infinite slab, *J. Math. Mech.* 11 (1962) 173-181.
- [7] Vidav, I., Spectra of perturbed semi groups with applications to transport theory, *J. Math. Anal. Appl.* 30 (1970) 264-279.